

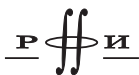
Зарубин В.С.  
Кувыркин Г.Н.

# Математические модели термомеханики



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 536  
ББК 22.25, 22.317  
3 34



*Издание осуществлено при поддержке  
Российского фонда фундаментальных  
исследований по проекту 02-01-14046д*

Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н. **Математические модели термомеханики.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 168 с. — ISBN 5-9221-0321-0.

Изложены основные подходы к построению математических моделей сплошной среды на основе современных представлений термодинамики необратимых процессов. Главным образом внимание уделено рассмотрению общности построения моделей термоупругой сплошной среды, линейной жидкости, термовязкоупругой и термопластической сред на основе представлений о сплошных средах скоростного типа, средах с внутренними параметрами состояния и средах с памятью.

Для научных работников, инженеров, аспирантов и студентов старших курсов технических университетов, специализирующихся в области механики сплошной среды и математического моделирования.

Ил. 15. Библиогр. 19 назв.

# СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие . . . . .	5
ВВЕДЕНИЕ. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ	
В.1. Газ и жидкость . . . . .	7
В.2. Твердое кристаллическое тело . . . . .	13
В.3. Твердое аморфное тело . . . . .	23
В.4. Основные гипотезы, предмет и методы термомеханики . . . . .	26
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ	
1.1. Ортогональные тензоры . . . . .	29
1.2. Тензорные поля. Дифференцирование и интегрирование тензоров . . . . .	35
2. ДВИЖЕНИЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ, ТЕОРИИ ДЕФОРМАЦИИ И НАПРЯЖЕНИЙ	
2.1. Эйлеров и лагранжевы способы описания движения сплошной среды . . . . .	39
2.2. Тензоры деформации при эйлеровом и лагранжевом способах описания движения сплошной среды . . . . .	41
2.3. Тензор малой деформации. Условия совместности деформаций . . . . .	44
2.4. Геометрический смысл компонентов тензоров малой деформации . . . . .	50
2.5. Кинематические характеристики сплошной среды . . . . .	53
2.6. Массовые, объемные и поверхностные силы . . . . .	56
2.7. Тензоры напряжений при различных способах описания движения сплошной среды . . . . .	57
2.8. Тензоры напряжений при малых деформациях . . . . .	60
3. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ НЕОБРАТИМЫХ ПРОЦЕССОВ	
3.1. Основные понятия термодинамики необратимых процессов . . . . .	63
3.2. Закон сохранения массы . . . . .	65
3.3. Закон сохранения количества движения . . . . .	66
3.4. Закон сохранения момента количества движения . . . . .	69
3.5. Закон сохранения энергии . . . . .	71
3.6. Второй закон термодинамики . . . . .	74
3.7. Основные подходы к построению математических моделей в механике сплошной среды . . . . .	78
3.8. Условия на поверхности сильного разрыва . . . . .	85

4. ЛИНЕЙНАЯ ТЕРМОУПРУГАЯ СПЛОШНАЯ СРЕДА	
4.1. Классическая термоупругость . . . . .	91
4.2. Теория температурных напряжений . . . . .	97
4.3. Термоупругая среда с внутренними параметрами состояния . . . . .	103
4.4. Термоупругая сплошная среда скоростного типа . . . . .	109
5. ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ЖИДКОСТИ	
5.1. Жидкость как сплошная среда скоростного типа . . . . .	114
5.2. Идеальная жидкость . . . . .	117
5.3. Некоторые особенности движения вязкой несжимаемой жидкости . . . . .	121
5.4. Вязкая жидкость как сплошная среда с памятью . . . . .	123
6. ЛИНЕЙНАЯ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГАЯ СПЛОШНАЯ СРЕДА	
6.1. Термовязкоупругая среда скоростного типа . . . . .	126
6.2. Термовязкоупругая среда, зависящая от скорости изменения тензора напряжений . . . . .	130
6.3. Термовязкоупругая среда с внутренним параметром состояния . . . . .	133
6.4. Термовязкоупругая среда с памятью . . . . .	137
6.5. Ограничения на функции релаксации и частные случаи термовязкоупругой среды с памятью . . . . .	142
7. ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ СПЛОШНАЯ СРЕДА	
7.1. Условия текучести и условия упрочнения . . . . .	145
7.2. Определяющие уравнения для термоупругопластической среды . . . . .	151
7.3. Деформационная теория термопластичности . . . . .	156
7.4. Термопластическая сплошная среда с памятью . . . . .	161
Список литературы . . . . .	167

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Большинство технологических процессов и рабочих процессов в технических устройствах можно трактовать с позиций механики сплошной среды как совокупность процессов переноса массы, количества движения и энергии, сопровождающихся преобразованием энергии, а нередко — и фазовыми переходами. Такие процессы принято называть термомеханическими. Интенсификация рабочих и технологических процессов приводит к большим плотностям потоков энергии и массы, к значительной скорости их изменения. Достоверность и полнота анализа работоспособности и эффективности таких устройств существенным образом зависят от обоснованного выбора адекватных математических моделей термомеханических процессов. При разработке этих моделей необходимо совместно рассматривать теоретические положения механики сплошной среды и термодинамики необратимых процессов, составляющие основу научного направления, которое получило название термомеханики.

В данной книге предпринята попытка последовательного изложения основ термомеханики и путей построения математических моделей процессов в конструкционных материалах и технических устройствах. При написании книги использован материал курсов, которые читают авторы в Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана. Основной особенностью изложенного в книге подхода является введение в математические модели рассматриваемых сред внутренних параметров состояния. Это позволяет связать макроскопическое поведение сплошной среды с процессами, протекающими на микроуровне, и расширяет возможности построения адекватных математических моделей достаточно сложных и существенно нестационарных термомеханических процессов. При таком подходе наряду с законами сохранения массы, количества движения и энергии используются соотношения термодинамики необратимых процессов, которые устанавливают структуру уравнений, включающих внутренние параметры состояния среды и скорости их изменения во времени.

Книга включает введение и семь глав. Во введении изложены элементы физической механики применительно к таким состояниям среды, как газ, жидкость, кристаллическое и аморфное твердые тела, и сформулированы основные гипотезы и предмет термомеханики, а в первой главе приведены используемые далее в книге понятия и соотношения тензорного исчисления. Вторая глава посвящена описанию движения и деформирования сплошной среды и изложению теории напряжений. Законы сохранения физических субстанций и основы термодинамики необратимых процессов рассмотрены в третьей главе. В остальных четырех главах методы термомеханики применены к построению линейных математических моделей жидкости, термоупругой и термовязкоупругой сплошных сред, а также нелинейных моделей термоупругопластической среды.

Авторы благодарны экспертам Российского фонда фундаментальных исследований за положительную оценку содержания книги. Они будут признательны всем, кто выскажет свои замечания по этой книге, которые можно направить по адресу: 105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5, МГТУ им. Н.Э. Баумана, кафедра прикладной математики, или e-mail: [fn2@sm.bmstu.ru](mailto:fn2@sm.bmstu.ru).

## ВВЕДЕНИЕ. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

**В.1. Газ и жидкость.** Газом называют агрегатное состояние вещества, в котором его частицы не связаны или очень слабо связаны силами взаимодействия и движутся хаотически, заполняя весь предоставленный им объем. Любое вещество можно перевести в газообразное состояние, подобрав соответствующие величины давления  $p$  и температуры  $T$ . Возможную область существования газообразного состояния изображают в переменных  $p - T$  (рис. В.1).

При температуре ниже критической  $T_k$  эта область ограничена кривыми сублимации (возгонки) I и парообразования II. Последнее означает, что при любом значении давления ниже критического  $p_k$  существует температура  $T$ , выше которой вещество становится газообразным. При температурах ниже температуры  $T_p$  тройной точки газ может находиться в равновесии с твердой фазой вещества (на кривой I), а между тройной и критической точкой К — с жидкой фазой.

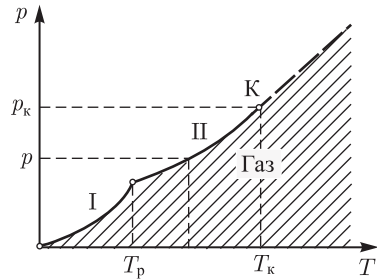


Рис. В.1.

Газ в этом состоянии называют паром вещества. При  $T > T_k$  граница газообразной области условна, так как при этих температурах превращения не происходят.

В связи с тем, что область газового состояния очень обширна, свойства газов при изменении температуры и давления могут меняться в широких пределах. Так, в нормальных условиях ( $T = 273 \text{ К}$ ,  $p \approx 0,1 \text{ МПа}$ ) плотность газа примерно в тысячу раз меньше плотности того же вещества в твердом или жидком состоянии.

В молекулярно-кинетической теории газ рассматривают как совокупность слабо взаимодействующих частиц, находящихся в непрерывном хаотическом (тепловом) движении. У достаточно разреженных газов среднее расстояние между молекулами значительно больше (на порядок) радиуса действия сил межмолекулярного взаимодействия. В таких условиях молекулы взаимодействуют лишь при сближении на расстояние действия межмолекулярных сил и, следовательно, общий объем, в котором эти силы могут сказываться, составляет  $\approx 0,001$  от полного объема газа. Это позволяет считать объем молекул газа в нормальных условиях пренебрежимо малым и рассматривать молекулы как материальные точки. Если эти материальные точки рассматривают как невзаимодействующие друг с другом, то такая модель соответствует модели идеального газа.

При тепловом равновесии идеального газа все направления движения его молекул равновероятны, а их скорости подчиняются распределению

Максвелла (рис. В.2). Подавляющее большинство молекул имеют значения скорости  $v$ , близкие к наиболее вероятной  $v_H$ , соответствующей максимуму этого распределения при данной температуре. Однако существует некоторая часть молекул с меньшими и большими скоростями. Распределение

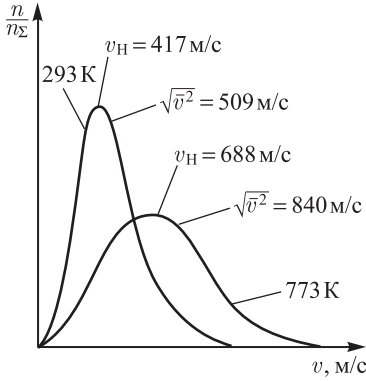


Рис. В.2.

Максвелла позволяет определить среднюю квадратичную скорость молекул  $\bar{v} = \sqrt{\bar{v}^2}$ , связанную с температурой  $T$  соотношением

$$\bar{v}^2 = \frac{3kT}{m}, \quad (\text{В.1})$$

где  $k \approx 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К — постоянная Больцмана;  $m$  — масса молекулы.

Уравнение (В.1) устанавливает связь между средней кинетической энергией одной молекулы и температурой газа:

$$\frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2}kT. \quad (\text{В.2})$$

Молекулярно-кинетическая теория рассматривает давление газа  $p$  на стенке сосуда, в котором он находится, как воздействие ударов молекул, усредненное по поверхности и по времени. Количественно давление газа определяется импульсом, передаваемым молекулами в единицу времени единице площади стенки:

$$p = \frac{1}{3}nm\bar{v}^2, \quad (\text{В.3})$$

где  $n$  — число молекул в единице объема.

Уравнения (В.2) и (В.3) дают возможность записать уравнение состояния идеального (совершенного) газа в виде

$$p = nkT \quad \text{или} \quad pV_\mu = RT, \quad (\text{В.4})$$

где  $R = kN$  — универсальная газовая постоянная,  $V_\mu$  — объем, приходящийся на один моль газа,  $N$  — число молекул в одном моле (число Авогадро). Уравнение (В.4) называют уравнением Клапейрона (Клапейрона–Менделеева).

Кинетические свойства газов — диффузию, вязкость, теплопроводность — молекулярно-кинетическая теория рассматривает с единой точки зрения: диффузию как перенос массы молекулами, вязкость как перенос молекулами количества движения и, наконец, теплопроводность как перенос ими энергии.

Модель идеального газа для анализа явлений переноса непригодна, так как в этих процессах определяющую роль играют столкновения молекул и их линейные размеры, влияющие на частоту столкновений. Однако



первостепенное значение имеет средняя длина свободного пробега молекулы — среднее расстояние, проходимое молекулой газа между двумя ее столкновениями в условиях термодинамического равновесия.

Рассмотрим свободный пробег как расстояние, проходимое молекулой между двумя последовательными столкновениями. Эту величину называют средней длиной свободного пробега Максвелла:

$$\bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n d^2},$$

где  $d$  — диаметр молекулы. Средняя длина свободного пробега  $l_v$  молекулы с величиной скорости  $v$  равна

$$l_v = \frac{v}{\Theta}, \quad (\text{В.5})$$

где

$$\Theta = \frac{\sqrt{\pi} n d^2}{(m/2kT)v} \Psi \left( v \sqrt{\frac{m}{2kT}} \right),$$

$$\Psi(x) = x \exp(-x^2) + (2x + 1) \int_0^x \exp(-y^2) dy.$$

В этом случае

$$\frac{l_v}{\bar{l}} = \frac{4\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{v}{\bar{v}}\right)^2}{\Psi\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{v}{\bar{v}}\right)}. \quad (\text{В.6})$$

Соотношение (В.6) получено из анализа вероятности столкновения в единицу времени молекулы, имеющей скорость  $v$ , с молекулой, имеющей скорость  $v' \in [0, \infty)$ .

Эффект вязкости проявляется лишь тогда, когда в газе имеются неодинаковые макроскопические скорости. В газах расстояние между молекулами существенно больше радиуса действия межмолекулярных сил, поэтому вязкость газов — следствие хаотического движения молекул, в результате которого происходит обмен молекулами между движущимися друг относительно друга слоями газа. Это приводит к переносу от слоя к слою определенного количества движения, в результате чего медленные слои ускоряются, а более быстрые замедляются. Следовательно, применение теории равновесных явлений к неравновесному процессу переноса возможно лишь при условии, что отклонение от равновесного состояния мало. Если молекулы представляют собой упругие сферы диаметром  $d$ , то коэффициент вязкости газа  $\eta$  определяют по формуле

$$\eta = \frac{1}{3} n m \int_0^{\infty} v f(v) l_v dv,$$

где  $f(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{m}{2kT}v^2\right)$ , и далее, используя соотношения (В.5) и (В.6), можно показать, что

$$\eta = \frac{2m\sqrt{\bar{v}^2}}{3\sqrt{\pi}d^2} \int_0^{\infty} \frac{x^5 \exp(-x^2)}{\Psi(x)} dx. \quad (\text{В.7})$$

Соотношение (В.7) имеет сравнительно большую погрешность, так как оно не учитывает влияние сохраняемости скорости при столкновении молекул на процесс переноса количества движения. Более точные вычисления дают

$$\eta = 0,461 \frac{m\bar{v}}{\sqrt{2}\pi d^2}. \quad (\text{В.8})$$

Формула (В.8) выведена для упругих сферических молекул. Она показывает, что  $\eta$  не зависит от плотности газа. Очевидно, что такой результат имеет место только для разреженных газов.

При изучении теплопроводности в газах полагают, что молекула, имеющая скорость  $v$  и кинетическую энергию  $E$ , проходя без столкновений расстояние  $l$ , переносит энергию  $E$ . Движение молекул происходит таким образом, что перенос энергии осуществляется из области с большей энергией в область с меньшей энергией, т. е. из области с высокой температурой в область с низкой температурой. Тогда теплопроводность

$$\lambda^{(T)} = \frac{1}{3} n\bar{v}l c_V, \quad (\text{В.9})$$

где  $c_V = d\bar{E}/dT$  — молекулярная теплоемкость при постоянном объеме;  $\bar{E}$  — средняя энергия молекул, проходящих через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения теплоты.

Очевидно, что формула (В.9) является приближенной, так как она учитывает только энергию, связанную с поступательным движением молекул, и не учитывает информацию об обмене энергией между поступательными и вращательными степенями свободы для многоатомных молекул.

Отметим, что для многоатомных молекул равномерное распределение энергии между вращательными и поступательными степенями свободы происходит довольно быстро. Передача энергии на колебательные степени свободы, число которых зависит от структуры молекул, как правило сильно запаздывает. Такое запаздывание можно приближенно описать с помощью релаксационного уравнения:

$$\tau_k \frac{de_k}{dt} = \bar{e}_k - e_k, \quad (\text{В.10})$$

где  $e_k$  — энергия  $k$ -й степени свободы молекулы, соответствующая  $k$ -й форме ее собственных колебаний;  $\bar{e}_k$  — равновесное (установившееся) значение этой энергии;  $\tau_k$  — время релаксации.

Для поступательных степеней свободы Дж. Максвеллом была предложена формула

$$\tau_{\text{п}} = \frac{\eta}{p},$$

которая для воздуха при  $T = 273 \text{ К}$  и  $\eta = 0,172 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2$  дает значения  $\tau_{\text{п}} = 1,7 \cdot 10^{-10} \text{ с}$ .

В отличие от идеального для реального газа силы межмолекулярно-взаимодействия существенны. Для описания свойств реального газа применяют различные уравнения состояния, отличающиеся от уравнения Клапейрона–Менделеева. Одним из таких уравнений является уравнение Ван-дер-Ваальса:

$$\left(p + \frac{a}{V_{\mu}^2}\right) (V_{\mu} - b) = RT, \quad (\text{В.11})$$

где  $a/V_{\mu}^2$  — внутреннее давление, обусловленное силами притяжения между молекулами;  $b$  — поправка на собственный объем молекул, учитывающая действие сил отталкивания между молекулами,  $b = \frac{2}{3} \pi d^3 N$ . Величина  $a$  определена формулой

$$a = -2\pi N^2 \int_d^{\infty} W_{\text{п}}(x) x^2 dx,$$

где  $W_{\text{п}} \leq 0$  — потенциальная энергия притяжения двух молекул.

Среди сил межмолекулярного взаимодействия различают силы притяжения и отталкивания, имеющие электрическую природу. Силы притяжения, проявляющиеся на расстоянии  $r \approx 10^{-9} \text{ м}$ , между центрами масс молекул называют ван-дер-ваальсовыми силами. Они являются причиной поправки на внутреннее давление в уравнении (В.11). Различают три вида ван-дер-ваальсовых сил:

– ориентационные силы между двумя молекулами, обладающими дипольным моментом или моментами более высоких порядков; они  $\sim r^{-7}$  и зависят от взаимной угловой ориентации электрических моментов. Для двух диполей с электрическим моментом  $P_e$  усредненная по всем ориентациям диполей сила

$$f_{\text{ор}} = -\frac{4P_e^4}{kT} \frac{1}{r^7};$$

– индукционные силы, вызванные индуцированной поляризацией молекулы, находящейся в электрическом поле другой молекулы. Усредненная по всем ориентациям диполя сила

$$f_{\text{инд}} = -12\alpha P_e^2 \frac{1}{r^7},$$

где  $\alpha$  — поляризуемость молекулы;  $P_e = \alpha E$  — дипольный момент молекулы, индуцированный электрическим полем напряженности  $E$ ;

– дисперсионные силы, действующие между неполярными молекулами. Поскольку в атомах и молекулах электроны движутся сложным образом, то в среднем по времени дипольные моменты неполярных молекул равны нулю, однако их мгновенные значения могут быть отличны от нуля. Мгновенный диполь создает электрическое поле, поляризующее соседние молекулы, и вследствие этого возникает взаимодействие соседних молекул. Энергия взаимодействия неполярных молекул есть средний результат взаимодействия таких мгновенных диполей. Сила притяжения между двумя молекулами в этом случае

$$f_{\text{дисп}} = -\frac{9}{2}\alpha^2 I \frac{1}{r^7},$$

где  $I$  — потенциал ионизации атома или молекулы, который характеризует прочность связи электрона в атоме или молекуле.

На расстояниях  $r \leq 10^{-10}$  м между центрами молекул возникает квантовое обменное взаимодействие между нейтральными атомами, приводящее или к сильному притяжению с образованием химической связи, или к возникновению значительных сил отталкивания.

Силы отталкивания убывают с увеличением расстояния между центрами молекул по закону

$$f_{\text{от}} \sim \frac{1}{r^n},$$

где  $n \geq 9$ , т.е. значительно быстрее, чем силы притяжения. Область пространства, в которой существенно проявляются силы взаимодействия данной молекулы с другими частицами, называют сферой ее молекулярного действия.

Очевидно, что явления вязкости и теплопроводности в реальных газах достаточно сложны. Однако можно ожидать, что перераспределение импульсов и энергии между различными степенями свободы молекул реального газа будут подчиняться уравнению типа (В.10).

Жидкостью называют агрегатное состояние вещества, промежуточное между газообразным и твердым. Жидкость сохраняет свой объем, образует поверхность раздела фаз и обладает некоторой прочностью при растяжении. Расстояние между молекулами жидкости существенно меньше, чем у газа, поэтому небольшое изменение этого расстояния приводит к появлению значительных сил межмолекулярного отталкивания. Последним и обусловлена малая сжимаемость жидкости. Обычные жидкости изотропны, за исключением жидких кристаллов, анизотропия которых связана с преобладанием у них в микрообъемах определенной ориентации молекул.

В жидкостях существует ближний порядок — упорядоченное относительное расположение соседних частиц жидкости внутри малых ее объемов. Молекулы жидкости совершают тепловые колебания около положений равновесия со средней частотой  $1/\tau_0$ , близкой к частотам колебаний атомов в кристаллах, и амплитудой, определяемой объемом, предоставляемым молекуле ее соседями. По истечении времени  $\tau \gg \tau_0$  эти положения равновесия смещаются на расстояния  $\approx 10^{-10}$  м. Среднее (по совокупности

большого числа молекул) время  $\tau$  называют временем релаксации. Оно является характерным временем, связанным с перемещением частиц жидкости на расстояния  $\approx 10^{-10}$  м. Эти хаотические перемещения совершаются не непрерывно, а в виде активированных скачков с преодолением потенциального барьера высотой  $\mathcal{E}$  (энергии активации). Продолжительность  $\tau$  пребывания молекулы во временном положении равновесия уменьшается с ростом температуры по закону

$$\tau \sim \exp \frac{\mathcal{E}}{kT}.$$

Действие внешних сил, стремящихся изменить форму жидкости и обуславливающих ее текучесть, связано с временем релаксации  $\tau$ . Если характерное время внешнего воздействия или его период малы по сравнению с  $\tau$ , то частицы жидкости не успевают изменить своего положения и жидкость не проявляет текучести. Если же это время велико по сравнению с  $\tau$ , то за это время частицы много раз перемещаются из одного положения равновесия в другое и эти перемещения, быстро следующие друг за другом, проявляются в текучести жидкости.

**В.2. Твердое кристаллическое тело.** Твердым телом называют агрегатное состояние вещества, определяемое стабильностью формы и характером теплового движения атомов, которые совершают малые колебания около положения равновесия. Различают кристаллические и аморфные

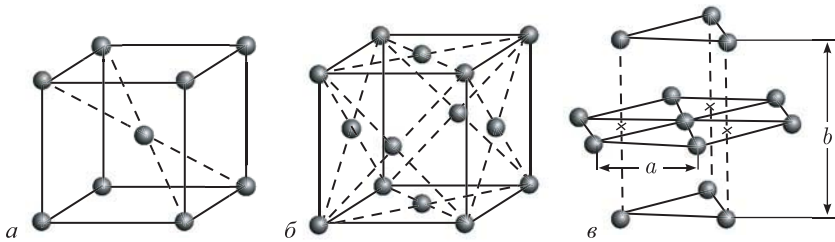


Рис. В.3.

твердые тела. Для кристаллов характерна пространственная периодичность в расположении равновесных состояний атомов. На рис. В.3 представлены некоторые типы кристаллических решеток: а) кубическая объемноцентрированная; б) кубическая гранецентрированная; в) гексагональная плотноупакованная.

Отдельно взятое кристаллическое зерно в поликристаллическом твердом теле можно рассматривать как монокристалл с однородной по объему и определенно ориентированной в пространстве кристаллической решеткой. Расположение атомов в узлах кристаллической решетки определяется силами их взаимодействия. Природа этого взаимодействия объясняется следующим образом. Внешние валентные электроны в атомах металлов

сравнительно слабо связаны с ядром и свободно перемещаются в кристаллической решетке, образуя так называемый электронный газ. Атомы металла при этом превращаются в положительно заряженные ионы, которые взаимодействуют друг с другом и электронным газом. В ионных кристаллах (NaCl, KCl и др.) основные силы притяжения, действующие между ионами, — электростатические. В кристаллах с ковалентной связью (алмаз, Ge, Si) валентные электроны соседних атомов обобществлены, кристалл представляет собой как бы огромную молекулу. Молекулы в молекулярных кристаллах (кристаллах органических соединений) связаны между собой слабыми электростатическими силами (ван-дер-ваальсовы силы), обусловленными динамической поляризацией молекул. И, наконец, в кристаллах с водородными связями каждый атом водорода связан силами притяжения одновременно с двумя другими атомами. Заметим, что классификация по типам связи условна, во многих кристаллических веществах наблюдается комбинация различных типов связи.

С уменьшением расстояния между ионами увеличивается плотность электронного газа, который “стягивает” ионы между собой. Однако одновременно возрастают и силы отталкивания, которые более резко изменяются в зависимости от расстояния между ионами. Расположение ионов становится устойчивым, когда силы притяжения уравновешены силами отталкивания, а суммарная энергия взаимодействия минимальна.

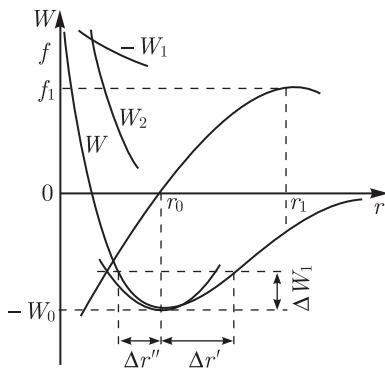


Рис. В.4.

Тепловое и механическое воздействия на тело приводят к изменению расстояний между ионами и к деформации кристаллической решетки. Так как ионы в решетке взаимодействуют, главным образом, со своими ближайшими соседями, для выяснения влияния этих воздействий с качественной стороны достаточно рассмотреть поведение лишь одной пары ионов в линейной цепочке.

Энергия взаимодействия  $W$  пары ионов складывается из потенциальной энергии  $W_1 < 0$  сил притяжения (рис. В.4). Энергия  $W_1$ , как и сами силы притяжения, меняется с расстоянием  $r$  между ионами менее резко, чем энергия  $W_2$ . Поэтому суммарная энергия взаимодействия  $W = W_1 + W_2$  при изменении  $r$  достигает минимального значения  $W_0 < 0$ . Оно соответствует расстоянию  $r_0$ , на котором суммарная сила взаимодействия  $f = \partial W / \partial r$  равна нулю. Величина  $r_0$  характеризует расстояние между ионами в линейной цепочке при отсутствии внешних воздействий, а  $W_0$  — энергию, необходимую для разрушения этой цепочки.

При механическом воздействии (растяжении или сжатии цепочки) внешняя сила и отклонение  $\Delta r = r - r_0$  иона от положения равновесия связаны нелинейной зависимостью. Вследствие асимметрии кривой  $W(r)$  относительно точки  $r = r_0$  жесткость  $C = \partial f / \partial r$  связи между ионами уменьшается при растяжении и возрастает при сжатии цепочки. Это соответствует аналогичному изменению модулей упругости кристаллического твердого тела.

При повышении температуры  $T$  увеличивается энергия  $\Delta W_T$  теплового возбуждения ионов и амплитуда их колебаний относительно положения равновесия. При гармонических колебаниях среднее положение иона в решетке не зависело бы от температуры. Однако вследствие асимметрии кривой  $W(r)$  колебания ионов агармоничны и отклонения от положения равновесия  $r = r_0$  неодинаковы ( $\Delta r' > |\Delta r''|$ ). Поэтому среднее расстояние  $\bar{r}$  между ионами увеличивается, что приводит к температурному расширению кристаллического тела. Жесткость рассматриваемой линейной цепочки  $C_{\bar{r}} = \partial f / \partial r|_{r=\bar{r}}$ , соответствующая среднему расстоянию  $\bar{r}$ , уменьшается с повышением температуры, в связи с чем уменьшаются модули упругости материала.

Для количественной оценки влияния теплового и механического воздействий на одномерную модель материала в виде линейной цепочки ионов используют методы классической статистической физики. Они применимы к большинству металлов при температурах, начиная с нормальной и выше, а точнее — при  $T > \theta_D$ , где  $\theta_D$  — характеристическая температура Дебая ( $\theta_D = \hbar \omega_D / k$ , где  $\hbar \approx 1,054 \cdot 10^{-34}$  Дж · с — постоянная Планка,  $\omega_D = \bar{a}(6\pi^2 n)^{1/3}$  — предельная частота упругих колебаний кристаллической решетки,  $\bar{a}$  — усредненная скорость звука в твердом теле,  $n$  — число атомов в единице объема). Эта температура достаточна для возбуждения почти всех возможных колебаний ионов в кристаллической решетке, если справедлив закон Дюлонга–Пти для приходящейся на один атом теплоемкости  $c'_V = 3k$  при постоянном объеме.

Воспользовавшись формулой усреднения, получим

$$\Delta \bar{r} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \Delta r \psi(\Delta r) d\Delta r}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\Delta r) d\Delta r}, \quad (\text{B.12})$$

где  $\psi(\Delta r) = A_* \exp(-W^*(\Delta r)/(kT))$  — функция распределения Больцмана частиц по уровням энергии, зависящим от текущего отклонения  $\Delta r = r - r_0$ ,  $A_*$  — коэффициент пропорциональности.

Энергию  $W^*(\Delta r)$  целесообразно отсчитывать от значения  $-W_0$  при  $r = r_0$ . В нее войдет работа внешней силы  $f_1 \Delta r$ , взятая с обратным знаком, и энергия взаимодействия, которую представим в виде ряда:

$$\Delta W = W + W_0 = \frac{C_0}{2} (\Delta r)^2 - \gamma_0 \frac{C_0}{r_0} (\Delta r)^3 + \dots, \quad (\text{B.13})$$

где  $C_0 = \left. \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \right|_{r=r_0}$ ,  $\gamma_0 \frac{C_0}{r_0} = -\left. \frac{1}{6} \frac{\partial^3 W}{\partial r^3} \right|_{r=r_0}$ , ограничившись в нем слагаемыми до  $(\Delta r)^3$  включительно. Энергию теплового возбуждения  $\Delta W_T$  можно не вводить в выражение для  $W^*$ , так как она не зависит от  $\Delta r$  и не повлияет на результат усреднения по формуле (B.12).

В итоге получим

$$W^*(\Delta r) = -f_1 \Delta r + \frac{C_0}{2} (\Delta r)^2 - \gamma_0 \frac{C_0}{r_0} (\Delta r)^3$$

и вместо (B.12) запишем

$$\Delta \bar{r} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \Delta r \exp\left(\frac{f_1 - C_0 \Delta r/2}{kT}\right) f_3(\Delta r) d\Delta r}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{f_1 - C_0 \Delta r/2}{kT}\right) f_3(\Delta r) d\Delta r}.$$

Вероятность достижения уровней энергии, соответствующих большим значениям  $\Delta r$ , ничтожна, а для малых  $\Delta r$  функцию  $f_3(\Delta r)$  можно приближенно представить первыми двумя слагаемыми разложения в ряд:

$$f_3(\Delta r) = \exp\left(\frac{\gamma_0 C_0 (\Delta r)^3}{r_0 kT}\right) \approx 1 + \frac{\gamma_0 C_0 (\Delta r)^3}{r_0 kT}.$$

Тогда интегралы можно свести к табличным и получить

$$\Delta \bar{r} = \frac{(1 + 6\gamma_0 f_1/(r_0 C_0)) f_1/C_0 + (3 + (f_1^2/(kT C_0))^2) \gamma_0 kT/(r_0 C_0)}{1 + (3 + f_1^2/(kT C_0)) \gamma_0 f_1/(r_0 C_0)}. \quad (\text{B.14})$$

При отсутствии внешней силы ( $f_1 = 0$ )  $\Delta \bar{r} = 3\gamma_0 kT/(r_0 C_0)$ , что позволяет записать выражение для температурного коэффициента линейного расширения:

$$\alpha_0^{(T)} = \left. \frac{1}{r_0} \frac{\partial \Delta \bar{r}}{\partial T} \right|_{f_1=0} = \frac{3\gamma_0 k}{r_0^2 C_0}. \quad (\text{B.15})$$

Для большинства металлов он имеет порядок  $10^5 \text{ K}^{-1}$ , а  $\gamma_0 = 1,5 \div 2,5$ .

При отсутствии теплового воздействия ( $T \rightarrow 0$ ) предельным переходом из соотношения (B.14) для деформации цепочки атомов (ионов) найдем  $\varepsilon_0 = \Delta \bar{r}/r_0 = f_1/(r_0 C_0)$ . В случае изотермического сжатия кристалла с кубической решеткой гидростатическим давлением  $p$  внешняя сила, действующая на каждую линейную цепочку,  $f_1 = -pr_0^2$ , а относительное изменение объема кристалла при малых деформациях  $\Delta V/V = 3\varepsilon_0 = -3pr_0/C_0$ . Тогда изотермический модуль всестороннего сжатия  $K_0 = -p/(\Delta V/V) = C_0(3r_0)$  и вместо равенства (B.15) получим

$$\alpha_0^{(T)} = \frac{\gamma_0 k}{r_0^2 K_0}. \quad (\text{B.16})$$

Таким образом,  $C_0$  и  $\gamma_0$  можно выразить через макроскопические характеристики материала  $K_0$  и  $\alpha_0^{(T)}$ .



Представим  $f_1$  через условное напряжение  $\sigma = f_1/r_0^2$  в цепочке и приведем зависимость (В.14) с учетом выражения (В.16) и выражения для  $K_0$  к виду

$$\varepsilon = \frac{\Delta \bar{r}}{r_0} = \frac{(1 + 2\gamma_0\sigma/K_0)\sigma/(3K_0) + \alpha_0^{(T)}T(1 + (\gamma_0\sigma^2/(K_0^2\alpha_0^{(T)2}T))^2/27)}{1 + \gamma_0(\sigma/K_0)(1 + (\gamma_0/9)(\sigma/K_0)^2/(\alpha_0^{(T)}T))}. \quad (\text{В.17})$$

При  $\sigma \neq 0$  из соотношения (В.17) следует, что температурный коэффициент линейного расширения

$$\alpha^{(T)} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} = \alpha_0^{(T)} \frac{1 + \frac{\gamma_0\sigma}{K_0} + \frac{2(\gamma_0/3)^2(\sigma/K_0)^3}{(\alpha_0^{(T)}T)} + \frac{(\gamma_0/3)^3(\sigma/K_0)^5}{(\alpha_0^{(T)}T)^2}}{1 + \frac{\gamma_0\sigma}{K} + \frac{(\gamma_0/3)^2(\sigma/K_0)^3}{(\alpha_0^{(T)}T)^2}}. \quad (\text{В.18})$$

Зависимость  $\alpha^{(T)}$  от  $T$  довольно слабая, так как величины  $\sigma/K_0$  и  $\alpha_0^{(T)}T$  одного порядка ( $10^{-3} \div 10^{-2}$ ), но с ростом температуры  $T$  коэффициент  $\alpha^{(T)}$  несколько возрастает. В линейном приближении с учетом того, что  $|\sigma|/K_0 \ll 1$ , а значит, и  $(|\sigma|/K_0)^2/(\alpha_0^{(T)}T) \ll 1$  и  $(|\sigma|/K_0)^5/(\alpha_0^{(T)}T)^2 \ll 1$ , из соотношения (В.18) следует  $\alpha_0^{(T)} \approx \alpha_0^{(T)}(1 - \gamma_0\sigma/K_0)$ , т. е. при растяжении  $\alpha^{(T)}$  уменьшается, а при сжатии — возрастает. Однако это влияние при  $|\sigma|/K_0 < 10^{-2}$  невелико, что позволяет в большинстве случаев рассматривать температурную деформацию  $\varepsilon^{(T)} = \alpha^{(T)}T$  независимо от силовой деформации.

Величина, обратная производной  $\partial\varepsilon/\partial\sigma$ , характеризует относительное изменение жесткости кристаллического твердого тела. Дифференцируя соотношение (В.17), получим

$$\begin{aligned} \frac{K}{K_0} &= \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} \right)^{-1} = \\ &= \frac{\left( 1 + \frac{\gamma_0\sigma}{K_0} + \frac{(\gamma_0/3)^2(\sigma/K_0)^3}{(\alpha_0^{(T)}T)} \right)^2}{1 + \gamma_0 \left( 3\alpha_0^{(T)}T + \frac{4\sigma}{K_0} \right) + \left( \frac{\gamma_0\sigma}{K_0} \right)^2 + \left( 2 + \gamma_0 \frac{\sigma}{K} + \frac{\gamma_0\sigma/K_0}{3\alpha_0^{(T)}T} \right) \left( \frac{\gamma_0}{3} \right)^2 \frac{\sigma/K_0}{\alpha_0^{(T)}T}}, \end{aligned}$$

откуда в линейном приближении

$$\frac{K}{K_0} = 1 - \frac{2\gamma_0\sigma}{K_0} - 3\gamma_0\alpha_0^{(T)}T.$$

Таким образом, жесткость материала уменьшается при растяжении и увеличивается при сжатии, но абсолютное изменение модуля всестороннего сжатия  $\Delta K = K - K_0 = -2\gamma_0\sigma$  довольно мало по сравнению с  $K_0$ .

Для большинства металлов относительное изменение объема при нагревании от  $T = 0$  до температуры плавления  $T_{\text{пл}}$  составляет  $\Delta_{\text{пл}} = 3\alpha_0^{(T)}T \approx (5 \div 7) \cdot 10^{-2}$ , т. е. изменение  $K/K_0$  во всем диапазоне  $0 < T < T_{\text{пл}}$  оценивается в  $(10 \div 15)\%$ . Однако модули сдвига  $\mu$  и растяжения  $E$

могут изменяться более существенно, так как с повышением температуры изменяется коэффициент Пуассона  $\nu$ , роль которого не может быть учтена при рассмотрении взаимодействия ионов в линейной цепочке.

При растяжении цепочки ионов зависимость силы  $f$  от расстояния  $r$  является немонотонной. Без учета теплового воздействия из соотношения (B.13) следует

$$f = \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial \Delta W}{\partial r} = C_0 \Delta r - 3\gamma_0 C_0 \frac{(\Delta r)^2}{r_0} = C_0 r_0 \left( 1 - 3\gamma_0 \frac{\Delta r}{r_0} \right) \frac{\Delta r}{r_0} \quad (\text{B.19})$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial \Delta r} = C_0 \left( 1 - 6\gamma_0 \frac{\Delta r}{r_0} \right),$$

т. е. деформации  $\varepsilon_* = r_*/r_0 - 1 = 1/(6\gamma_0)$  соответствует максимальное значение  $f_* = C_0 r_0 / (12\gamma_0)$ . Условное напряжение, разрывающее цепочку ионов,  $\sigma_* = f_*/r_0^2 = K_0/(4\gamma_0)$ , т. е. примерно на порядок ниже значения модуля всестороннего сжатия. Величина  $3\gamma_0 \Delta r/r_0 = 3\gamma_0 \varepsilon = -\varepsilon/(2\varepsilon_*)$  характеризует отклонение зависимости (B.19) от линейной. Закон Гука будет выполняться с точностью до 0,01, если  $|\varepsilon| = |\Delta r|/r_0 \leq 0,01/(3\gamma_0) \approx 10^{-3}$ .

Взаимодействие ионов в пространственной кристаллической решетке более сложно, чем в линейной цепочке. В частности, именно пространственным взаимодействием ионов объясняется поперечное сужение материала при растяжении. Например, увеличение расстояния между ионами в направлении растяжения для кубической решетки (см. рис. B.3, *a* и *b*) приводит к возникновению сил притяжения не только между ионами в линейных цепочках, но и между диагонально расположенными ионами. Поэтому из условия равновесия каждого иона в поперечном направлении должны возникнуть силы отталкивания, что возможно, когда ионы сближаются в этом направлении, т. е. происходит поперечное сужение материала.

Строгий расчет пространственного взаимодействия ионов в кристаллической решетке возможен в предположении, что силы их взаимодействия — центральные, а колебания около положения равновесия — гармонические. Первое означает, что силы притяжения и отталкивания между ионами действуют по направлениям, соединяющим точки, которые соответствуют положениям равновесия. Однако для металлов это предположение является довольно грубым. Поэтому результаты расчета часто не отвечают экспериментальным данным.

Учет ангармонизма колебаний ионов и отклонения от центральности действия сил приводит к лучшему согласию между теорией и экспериментом, однако теория существенно усложняется. Практически более целесообразным для описания упругого поведения кристаллического твердого тела при механическом воздействии является экспериментальное определение совокупности необходимых характеристик. Реакцию кристаллического материала на тепловые воздействия также можно описать с помощью

экспериментально найденных удельной теплоемкости, температурного коэффициента линейного расширения и теплопроводности.

Представления о том, что ионы в кристаллической решетке занимают строго фиксированные положения, являются идеализированными. Такая идеализация не мешает рассматривать свойства кристаллических тел при сравнительно низких напряжениях и температурах, когда тела упруги. Однако с ростом температуры и напряжений необходимо учитывать наличие искажений в решетке реальных кристаллов. Существуют статические искажения кристаллической решетки в виде точечных дефектов, дислокаций и искажений в зоне границ между кристаллическими зернами в поликристаллическом теле. Рассмотрим кратко особенности точечных дефектов и дислокаций, так как они играют важную роль при объяснении микромеханизма деформирования кристаллов.

Простейшими типами точечных дефектов являются те дефекты, которые возникают в кристалле при переходе атома из узла решетки на внешнюю поверхность при замещении атома основного типа атомом другого типа либо при внедрении избыточного атома (того же или другого

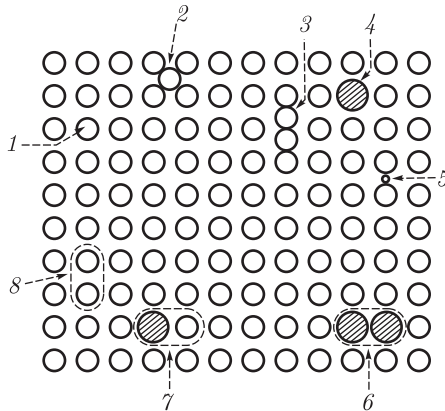


Рис. В.5.

типа) в положение, не являющееся обычным узлом решетки. Дефекты, возникающие при таких операциях, называют соответственно вакансией, замещенным атомом и междоузельным атомом. Их можно рассматривать как одиночные точечные дефекты в отличие от сложных дефектов или комплексов дефектов, которые могут образоваться при объединении двух или более элементарных дефектов. Некоторые из возможных дефектов схематически представлены на рис. В.5: 1 — одиночная вакансия; 2 и 3 — два различных типа внедрения собственных атомов; 4 — атом замещения; 5 — примесный атом внедрения; 6 — пара соседних атомов замещения; 7 — пара вакансия-междоузельный атом; 8 — пара вакансий (дивакансия).

В кристаллических твердых телах, состоящих из атомов двух или более сортов, основные типы точечных дефектов определяются такими факторами, как существование подрешеток атомов различных сортов и возможные требования стехиометрии и электрической нейтральности.

Введение точечного дефекта в кристалл создает локальные упругие искажения. В результате этих искажений дефект будет взаимодействовать с однородным полем напряжений, приложенных к кристаллу. Такое взаимодействие аналогично взаимодействию электрического диполя с внешним приложенным электрическим полем. В соответствии с этим дефект, который создает локальные искажения, называют упругим диполем. В то время как электрический диполь характеризуется векторной величиной — дипольным моментом  $\mathbf{P}_e$ , упругий диполь характеризуют тензором второго ранга, поскольку он взаимодействует с тензорным полем напряжений. Изменение компонентов тензора деформации кристалла при введении дефектов определяют уравнением

$$\varepsilon_{ij}^d - \varepsilon_{ij}^0 = \sum_{p=1}^{n_d} \mu_{ij}^{(p)} C_p, \quad (\text{B.20})$$

где  $\varepsilon_{ij}^d, \varepsilon_{ij}^0$  — компоненты тензора деформации кристалла с дефектами и без них ( $i, j = 1, 2, 3$ );  $p$  — индекс, обозначающий одну из возможных  $n_d$  эквивалентных ориентаций дефекта;  $C_p$  — молярная доля дефектов с ориентацией  $p$ . Соотношения (B.20) задают характеризующий упругий диполь тензор второго ранга с компонентами

$$\mu_{ij}^{(p)} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}^d}{\partial C_p},$$

и, следовательно,  $\mu_{ij}^{(p)}$  — компоненты тензора деформации, приходящейся на единичную молярную долю дефектов, имеющих одну и ту же ориентацию  $p$ .

Кинетическое уравнение для определения  $C_p$ , описывающее обусловленные точечными дефектами релаксационные эффекты, имеет вид

$$\frac{dC_p}{dt} = \nu_{pq} \left( C_q - \frac{C_0}{n_t} \right), \quad (\text{B.21})$$

где  $\nu_{pq}$  — вероятность перехода упругого диполя из ориентации  $p$  в ориентацию  $q$  за единицу времени ( $p, q = 1, \dots, n_d$ ),  $C_0$  — общая молярная концентрация дефектов,  $n_t$  — число независимых тензоров с компонентами  $\mu_{ij}^{(p)}$ ;  $n_t$  зависит только от типа кристаллической решетки и симметрии дефекта ( $n_t = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$ ). Отметим, что  $\nu_{pq}$  образуют матрицу, собственные числа которой отрицательны, а величины, обратно пропорциональные этим собственным числам и взятые с обратным знаком, называют временами релаксации  $\tau_r'$ . Следовательно, уравнения (B.21) можно записать иначе:

$$\frac{dC_r'}{dt} = -\frac{1}{\tau_r} (C_r' - \bar{C}_r'), \quad (\text{B.22})$$

причем  $C'_r$  — “нормальные координаты” концентрации, представляющие собой линейную комбинацию  $C_p$ .

В отличие от точечных дефектов дислокации являются линейными дефектами (искажения кристаллической решетки располагаются вдоль некоторой пространственной линии). Рассмотрим основные характеристики дислокаций на примере простой кубической кристаллической решетки.

Возникновение дислокации можно представить как результат частичного сдвига в кристаллической решетке, причем различают краевую и винтовую дислокации (рис. В.6, *a* и *б*). Смещение слоев атомов вдали от искажения кристаллической решетки характеризуют вектором Бюргерса  $\mathbf{b}$ . В случае простой кубической решетки модуль  $b = |\mathbf{b}|$  вектора Бюргерса

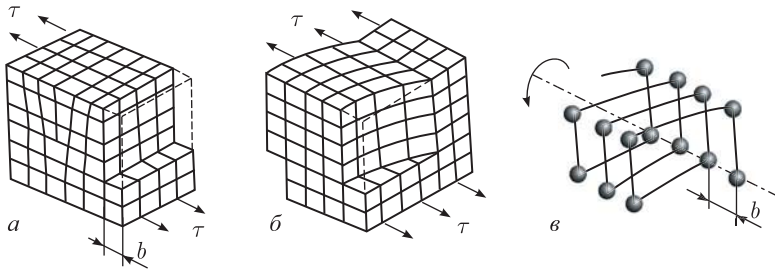


Рис. В.6.

краевой дислокации с одним лишним атомным слоем (рис. В.6 *a*) равен одному шагу решетки, а для винтовой дислокации  $|\mathbf{b}|$  равен шагу винтовой ломаной, которая образуется, если проследить за расположением атомов в зоне искажения (рис. В.6, *в*). В общем случае дислокации могут иметь смешанную ориентацию с краевым и винтовым компонентами. Дислокации возникают при кристаллизации материала и в процессе его неупругого деформирования.

Лишний слой атомов в зоне краевой дислокации искажает кристаллическую решетку и вызывает поле внутренних напряжений. Вблизи кромки этого слоя (ядра дислокации) искажения решетки настолько велики, что расположение атомов можно рассчитать только с учетом их энергии взаимодействия. В области за пределами нескольких межатомных расстояний от ядра дислокации поле напряжений можно определить методами теории упругости.

Как и точечные дефекты, дислокации могут перемещаться в объеме кристалла. Вдоль лишнего слоя атомов краевая дислокация перемещается лишь благодаря диффузии вакансий и внедренных атомов. В зону сжатия преимущественно попадают вакансии, а в зону растяжения — внедренные атомы, которые “пристраиваются” к кромке лишнего атомного слоя. Процесс диффузии протекает во времени, и краевая дислокация как бы переползает из одной плоскости частичного сдвига кристалла в другую.

Винтовая дислокация также способна двигаться, но в направлении, перпендикулярном к ее оси, при наличии проекции на эту ось внешнего касательного напряжения  $\tau$  (см. рис. В.6, б). Две параллельные винтовые дислокации одинаковых знаков (с одинаково направленными векторами Бюргерса) отталкиваются, а обратных знаков — притягиваются, что напоминает взаимодействие проводников с электрическим током. При слиянии двух дислокаций противоположных знаков искажения кристаллической решетки исчезают и потенциальная энергия кристалла уменьшается, а для слияния винтовых дислокаций одинаковых знаков необходимо произвести работу против сил отталкивания, равную разности энергий объединенной дислокации с модулем вектора Бюргерса  $2\mathbf{b}$  и двух исходных дислокаций:  $\mu(2b)^2 - 2\mu b^2 = 2\mu b^2$ , где  $\mu$  — модуль сдвига. Аналогичный вывод справедлив и для краевых дислокаций, расположенных в одной плоскости скольжения.

Теплопроводность твердых тел в зависимости от типа твердого тела имеет различную природу. В диэлектриках, не имеющих свободных электрических зарядов, перенос энергии теплового движения осуществляется фононами. Фононы представляют собой квазичастицы (элементарные возбуждения конденсированной среды, ведущие себя в некоторых отношениях как квантовые частицы), сопоставляемые волне смещений атомов (ионов) и молекул кристалла из положений равновесия. Энергию фонона  $E$  и квазиимпульс  $\mathbf{p}$  определяют равенства

$$E = \hbar\omega(\mathbf{k}), \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k},$$

где  $\omega$  — частота колебаний атома,  $\mathbf{k}$  — квазиволновый вектор. Число тепловых фононов тем больше, чем выше температура  $T$ . Теплоемкость кристаллической решетки практически совпадает с теплоемкостью фононного газа, а теплопроводность кристалла можно описать как теплопроводность фононного газа.

Фононы взаимодействуют друг с другом, с другими квазичастицами (электронами проводимости, магнонами и др.), а также с дефектами кристаллической решетки. Скорость изменения числа фононов  $N(\omega(\mathbf{k}))$  при столкновениях можно считать функцией отклонения числа фононов от равновесного, т. е. функцией  $n(\omega(\mathbf{k}))$ :

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{n}{\tau_n},$$

где  $n(\omega(\mathbf{k}))$  — неравновесная добавка к функции распределения фононов  $N(\omega(\mathbf{k}))$ ,  $\tau_n = \tau_n(\omega(\mathbf{k}))$  — время релаксации.

Если в кристалле существует направленный поток фононов, то этому потоку можно поставить в соответствие волновой вектор (вектор плотности распределения фононов). Тогда возбуждения, возникающие в фононном газе вследствие локального изменения энергии или температуры, могут переноситься в другие места кристалла такими потоками, что приводит к появлению гармонических температурных волн, аналогичных упругим волнам в газе или кристалле.

В металлах имеются два независимых способа передачи теплоты: свободными электронами и тепловыми колебаниями решетки. Механизм передачи теплоты колебаниями решетки аналогичен фононному механизму передачи теплоты в диэлектриках. Отметим, что для металлов количество теплоты, передаваемое свободными электронами, значительно превосходит количество теплоты, передаваемое тепловыми колебаниями решетки.

Процесс передачи теплоты в полупроводниках существенно сложнее, чем в диэлектриках, так как на него существенно влияют примеси, биполярная диффузия (диффузия пары электрон–дырка) и связанная с ней биполярная теплопроводность, а также дополнительный перенос энергии электромагнитным излучением (фотонами) и некоторые другие механизмы.

Отметим, что общим для процессов переноса массы, количества движения и энергии является их немгновенный характер. Переход от одного равновесного состояния на микроуровне к другому протекает во времени с характерным для каждого процесса временем релаксации.

**В.3. Твердое аморфное тело.** Аморфным называют твердое состояние вещества, характеризующееся изотропией свойств и отсутствием точки плавления. При повышении температуры аморфное вещество размягчается и переходит в жидкое состояние постепенно. Эти особенности обусловлены отсутствием у вещества в аморфном состоянии строгой периодичности, присущей кристаллам, в расположении атомов, ионов, молекул и их групп на протяжении сотен и тысяч периодов. В то же время у вещества в аморфном состоянии существует согласованность в расположении соседних частиц (ближний порядок). С увеличением расстояния эта согласованность исчезает и на больших расстояниях порядок “размывается”, переходя в “беспорядок”. Ближний порядок характерен и для жидкостей, но в жидкости происходит интенсивный обмен местами соседними частицами, затрудняющийся по мере возрастания вязкости. Поэтому твердое тело в аморфном состоянии можно рассматривать как переохлажденную жидкость с очень большой вязкостью.

Типичными представителями аморфных веществ являются полимеры (поли — много, мерос — часть). Основными в структуре полимеров оказываются размеры и периодическое строение молекул. Линейные цепные макромолекулы наиболее характерны для полимерного состояния. К ним примыкают умеренно разветвленные и умеренно сшитые (типа резин) системы, где цепочечная индивидуальность ветвей или участков между узлами сетки в достаточной мере сохраняется. В линейных полимерах макромолекулы представляют собой цепочечные последовательности повторяющихся звеньев, число которых настолько велико, что уже саму молекулу необходимо рассматривать как статистический ансамбль.

Макромолекулы полимеров конкретного химического состава и строения имеют вполне определенное пространственное расположение — конфигурацию. Изменение такого пространственного расположения (переход от одной конфигурации к другой) возможно только при разрыве химических

связей. Число способов упаковки макромолекулы в полимерном теле весьма велико и физические свойства этого тела зависят от того, каким образом оно было собрано из макромолекул.

При внешних тепловых и силовых воздействиях структура полимерного тела меняется путем серии элементарных движений отдельных участков макромолекул, приводящих к изменению их внешней формы. Растянутая за концы и затем предоставленная самой себе макромолекула за некоторое время  $\tau$ , называемое временем структурной релаксации, приобретает наиболее вероятную форму клубка. Растянуть клубок мгновенно также невозможно, на это требуется время того же порядка  $\tau$ . В результате взаимодействия смежных звеньев разных цепей их подвижность уменьшается, т. е. время  $\tau$  увеличивается. Из-за цепного характера макромолекул и их возможности конденсироваться в полимерное тело в различных пространственных формах фактор времени при отклике полимерной системы на любое внешнее воздействие играет важнейшую роль.

Определив конфигурации и внешние формы макромолекул, необходимо рассмотреть их взаимосвязи. Наличие множества уровней конфигураций и внешних форм предполагает некоторую независимость движений отдельных радикалов, повторяющихся звеньев, групп звеньев и более крупных структурных единиц. Когда цепочка под действием тепловых и силовых внешних факторов начинает изменять свою форму, разным элементарным движениям соответствуют различные времена  $\tau_i$ . Так, для поворота боковой группы вокруг связи, посредством которой она присоединена к главной цепи, требуется некоторое минимальное время  $\tau_1$ ; для поворота одного звена относительно другого — другое время,  $\tau_2$ ; для согласованного поворота двух звеньев — большее время,  $\tau_3$  и т. д. Все эти времена можно рассматривать как средние времена жизни соответствующих элементов структуры в определенной форме. Такие элементы структуры называют релаксаторами, а соответствующие времена жизни  $\tau_i$  — временами релаксации. Времена жизни индивидуальных релаксаторов определяют по формуле Больцмана:

$$\tau_i = B_i \exp \frac{\mathcal{E}_i}{kT},$$

где  $\mathcal{E}_i$  — энергия активации  $i$ -го релаксационного процесса, определяющая порог чувствительности релаксатора по отношению к внешнему механическому воздействию;  $B_i$  — предэкспоненциальный множитель. Естественно, что с изменением температуры весь релаксационный спектр смещается и деформируется. Характерные времена релаксации для различных процессов в линейных полимерах могут лежать в диапазоне величин от  $10^{-7}$  до  $10^9$  с, энергия активации —  $30 \div 125$  кДж/моль, а предэкспоненциальный множитель  $B_i$  —  $10^{-13} \div 10^{-5}$  с.

Полимеры могут находиться в четырех основных состояниях — кристаллическом, стеклообразном, высокоэластичном и вязкотекучем. Однако необходимо отметить, что кристаллические полимеры в действительности



никогда полностью не закристаллизованы и содержат часть некристаллической фазы. С каждым из состояний связан определенный комплекс физических свойств. Физические состояния и границы их существования можно изучать структурными методами, но чаще всего их определяют по изменениям свойств полимеров, которые очень чувствительны к структурным изменениям и релаксационным переходам.

На рис. В.7 приведены три типа кривых зависимости деформации  $\varepsilon$  от абсолютной температуры  $T$  для некристаллического линейного (1), кристаллического (2) и макросетчатого (3) полимеров. Римские цифры I, II и III соответствуют зонам стеклообразного, высокоэластичного и вязкотекучего состояний. Данные кривые могут быть получены при нагревании с заданной скоростью нагруженного образца полимера. Действующая нагрузка должна быть постоянной и достаточно малой по абсолютной величине, чтобы в полимере не возникали вызванные этой нагрузкой изменения структуры.

При низких температурах все полимеры деформируются так же, как и обычные твердые упругие тела. Если линейный полимер не кристаллизуется, то деформация с ростом температуры изменяется по кривой типа 1. Выше температуры стеклования  $T_c$  проявляется высокоэластичная деформация, а затем, выше температуры текучести  $T_t$ , начинается вязкое течение с накоплением необратимой деформации. Кривая 1 свидетельствует о том, что полимер может находиться в трех состояниях: стеклообразном, высокоэластичном и вязкотекучем. Каждому состоянию соответствует свой тип деформации. В стеклообразном состоянии при малых напряжениях можно наблюдать только упругую деформацию, при этом модуль упругости  $E = 0,2 \div 5,0$  ГПа. Такая деформация связана в первую очередь с изменением средних межзатомных и межмолекулярных расстояний в полимере.

При переходе через температуру стеклования к упругой деформации  $\varepsilon^{(e)}$  добавляется обратимая высокоэластичная составляющая  $\varepsilon^{(he)}$  полной деформации, которая превосходит упругую составляющую на три порядка. Выше температуры текучести наблюдается еще одна составляющая полной деформации — вязкая  $\varepsilon^{(v)}$ . В общем случае эти составляющие полной деформации играют различную роль при высоких и низких температурах.

Если линейный полимер находится в кристаллическом состоянии, то ниже температуры плавления—кристаллизации  $T_k$  он находится в твердом состоянии, но обладает различными модулями упругости ниже и выше температуры стеклования  $T_c$  (кривая 2). Это связано с тем, что аморфная часть полимера может находиться в различных состояниях. В тех случаях,

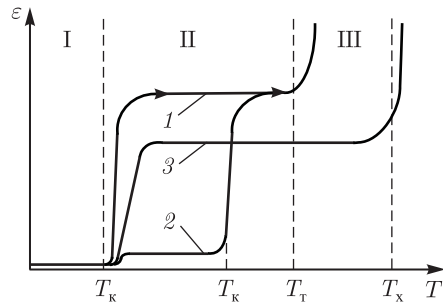


Рис. В.7.

когда полимер закристаллизован слабо, он деформируется практически как некристаллический полимер.

При температуре  $T_k$  кристаллическая часть полимера плавится и кривая 2 почти скачкообразно достигает кривой 1 на участке высокоэластичного состояния некристаллического полимера.

Если некристаллический полимер является макросетчатым, то для него характерна кривая 3. Узлы сетки препятствуют относительному смещению полимерных цепей. Поэтому при высоких температурах вязкого течения не наступает и полимер “не замечает” температуры текучести  $T_T$ . Температурная область высокой эластичности расширяется и ее верхней границей становится граница химического разложения полимера при температуре  $T_X$ .

Отметим, что проблемы изучения структуры и свойств полимеров на микроуровне неразрывно связаны с механическими и теплофизическими свойствами этих материалов, проявляемыми на макроуровне. Следовательно, процессы, происходящие в полимерах на микроуровне, необходимо учитывать при построении феноменологических моделей их поведения под действием внешних тепловых и силовых факторов.

**В.4. Основные гипотезы, предмет и методы термомеханики.** Механика все процессы в природе сводит к движению в пространстве. При изучении этих процессов полагают, что поведение рассматриваемой системы во времени может быть полностью определено набором координат  $x_i(t)$  как функций времени и связь между координатами может быть только функциональной. Если уравнения, фиксирующие эту связь, имеют решения, т. е. позволяют ввести  $n$  независимых координат  $x_i(t)$ , через которые выражаются другие координаты, то систему называют голономной, а число  $n$  — числом степеней свободы. Для голономных систем все степени свободы независимы друг от друга.

Полагают, что для полного определения движения системы материальных точек кроме  $n$  значений координат  $x_i(t)$  в некоторый начальный момент времени  $t_0$  достаточно знать еще только  $n$  значений скоростей изменения координат  $\dot{x}_i(t_0) = \left. \frac{dx_i}{dt} \right|_{t=t_0}$ . В этом случае движение системы полностью определено функцией координат и скоростей  $L(x_j, \dot{x}_j, t)$  — функцией Лагранжа. Наряду со скоростями  $\dot{x}_i$  для описания механических систем используют импульсы  $p_i(t)$ , определяемые соотношениями

$$p_i = \frac{\partial L(x_j, \dot{x}_j, t)}{\partial \dot{x}_i}.$$

Если перейти от переменных  $x_i, \dot{x}_i$  к переменным  $x_i, p_i$  с помощью преобразования

$$H(x_j, p_j, t) = p_i \dot{x}_i - L(x_j, \dot{x}_j, t),$$

то движение системы материальных точек можно описать с помощью функции Гамильтона  $H(x_j, p_j, t)$ , причем

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H(x_j, p_j, t)}{\partial p_i}.$$

Для одноатомного газа массой в один моль число степеней свободы при нормальных давлениях  $p \approx 0,1$  МПа и температуре  $T = 273$  К составляет  $n = 3N$ , где  $N \approx 6,02 \cdot 10^{23}$ /моль — число Авогадро. Для двухатомных газов  $n = 5N$ , так как к трем поступательным степеням свободы добавляются две вращательные вокруг ортогональных осей, лежащих в плоскости, перпендикулярной отрезку, который соединяет центры масс молекул. Очевидно, что решение системы  $n$  дифференциальных уравнений даже в идеализированной постановке весьма проблематично.

В случае, когда процессы в рассматриваемой системе не сводятся к движению в пространстве и не характеризуются только изменением значений координат  $x_i(t)$ , они являются немеханическими. Если обратиться к статистической физике, то оказывается, что далеко не все макроскопические величины имеют микроскопические аналоги, т. е. могут быть описаны усреднением по ансамблю функции пространственных координат и импульсов отдельной микросистемы. Не имеют микроскопических аналогов, например, энтропия и свободная энергия, а также явления диффузии, вязкости, теплопроводности и т. д. Теплота, хотя она в равновесном процессе и равна усредненной по ансамблю кинетической энергии беспорядочного движения молекул, также не имеет микроскопического аналога, по крайней мере в тех случаях, когда существенно поведение системы на микроуровне. Аналогичное утверждение относится и к температуре.

Развиваемый в физике статистический подход к изучению поведения материальных сред связан с введением средних по большому ансамблю частиц характеристик. Последнее приводит к необходимости введения дополнительных гипотез о свойствах частиц, их взаимодействии и с упрощением этих свойств и взаимодействий. Если же существенны еще и немеханические процессы, то в настоящее время не существует даже теоретической базы для построения таких методов.

Более общий подход к исследованию поведения материальных тел заключается в построении феноменологической макроскопической теории, основанной на полученных опытным путем общих закономерностях и гипотезах. Именно такой путь исследования закономерностей поведения материальных тел мы и будем рассматривать.

Первая гипотеза, которую при этом необходимо ввести, заключается в следующем. Несмотря на то что все тела состоят из отдельных частиц, их очень много в любом существенном для нас объеме. Поэтому каждое тело мы будем рассматривать как среду, заполняющую предоставленную часть пространства сплошным образом. Такая идеализация позволяет при изучении поведения материальных тел использовать аппарат дифференциального и интегрального исчисления.

Вторая гипотеза определяет пространство, в котором рассматривается материальное тело, как совокупность точек, задаваемых числами — координатами точек. В дальнейшем все интересующие нас явления будем изучать в евклидовом пространстве — пространстве, в котором можно ввести единую для всех точек декартову прямоугольную систему координат. Кроме того, в этом же пространстве расстояние между двумя любыми точками  $A$  и  $B$  (метрика) определяется по формуле

$$r = \sqrt{(x_1^A - x_1^B)^2 + (x_2^A - x_2^B)^2 + (x_3^A - x_3^B)^2}.$$

Наконец, в соответствии с третьей гипотезой, мы будем использовать абсолютное время. Это означает, что в дальнейшем мы не будем учитывать эффекты теории относительности.

Таким образом, мы будем изучать поведение сплошной среды — континуума в евклидовом пространстве с использованием абсолютного времени. При этом существенным для нас будет рассмотрение взаимодействия полей деформации и температуры, изучением которого занимается термомеханика — область механики, базирующаяся на законах термодинамики необратимых процессов и механики сплошной среды.

# 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

**1.1. Ортогональные тензоры.** Механика сплошной среды оперирует физическими величинами, которые не зависят от выбора системы координат, применяемой для их описания. Математически эти величины представляются тензорами и их удобно изучать в некоторой выбранной системе координат. В дальнейшем в данном пункте мы будем использовать декартову прямоугольную систему координат, что, в принципе, не лишает общности закономерности исследуемых явлений, однако существенно облегчает их представления.

Простейшим математическим объектом является *скаляр*, определяющий физическую величину, задаваемую только ее численным значением в любой системе координат (например, плотность, температура, работа, энергия и т. д.).

Следующим по сложности математическим объектом является *вектор*, который не только обладает численным значением, но и имеет направление. Мы будем обозначать векторы полужирными прямыми латинскими или греческими буквами: **a**, **x**, **u**, **U**, **ω** и т. д. В проекциях на оси выбранной прямоугольной декартовой системы координат вектор записывают в виде

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — орты (единичные направляющие векторы). В дальнейшем при записи выражений, содержащих одинаковые индексы, знак суммы будем опускать, полагая, что если в каком-либо выражении содержатся одинаковые индексы, то по ним производится суммирование:

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i. \quad (1.2)$$

Рассмотрим две системы координат: “старую”  $Ox_1x_2x_3$  и “новую”  $Ox'_1x'_2x'_3$ , получающуюся из первой преобразованием поворота. Если  $\mathbf{e}'_i$  и  $\mathbf{e}_j$  — орты, задающие направления осей  $Ox'_i$  и  $Ox_j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), то косинусы углов между данными осями  $\alpha_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j$  представляют собой скалярные произведения (см. ниже) этих ортов. Вектор **a** может быть задан проекциями  $a'_i$  на оси новой и проекциями  $a_j$  на оси старой систем координат и представлен разложением по ортам  $\mathbf{e}'_i$  и  $\mathbf{e}_j$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a'_1 \mathbf{e}'_1 + a'_2 \mathbf{e}'_2 + a'_3 \mathbf{e}'_3 = a'_i \mathbf{e}'_i, \\ \mathbf{a} &= a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 = a_j \mathbf{e}_j. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Орты новой  $\mathbf{e}'_i$  и старой  $\mathbf{e}_j$  систем координат связаны соотношениями

$$\mathbf{e}'_i = \alpha_{ij} \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}_j = \alpha_{ji} \mathbf{e}'_i, \quad (1.4)$$

где  $\alpha_{ij}$  — проекции  $\mathbf{e}'_i$  на  $\mathbf{e}_j$ , а  $\alpha_{ji}$  — проекции  $\mathbf{e}_j$  на  $\mathbf{e}'_i$ .

Подстановка соотношений (1.4) в (1.3) дает закон преобразования проекций вектора при переходе от одной системы координат к другой:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a'_i \mathbf{e}'_i = a'_i \alpha_{ij} \mathbf{e}_j = a_j \mathbf{e}_j, & a_j &= a'_i \alpha_{ij}; \\ \mathbf{a} &= a_j \mathbf{e}_j = a_j \alpha_{ji} \mathbf{e}'_i = a'_i \mathbf{e}'_i, & a'_i &= a_j \alpha_{ji}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Отметим, что проекции вектора на оси выбранной системы координат не являются скалярами, так как их величины зависят от ориентации системы координат.

Напомним основные операции над векторами. *Сложение векторов* подчиняется правилу параллелограмма, согласно которому сумма двух векторов есть диагональ параллелограмма, смежными сторонами которого являются слагаемые векторы, отложенные из одной точки,

$$a_i + b_i = c_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad \text{или} \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}.$$

Разностью  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$  двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  называют такой вектор  $\mathbf{x}$ , что  $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

*Произведением вектора  $\mathbf{a}$  на число  $\lambda$*  называют вектор  $\lambda \mathbf{a}$ , коллинеарный вектору  $\mathbf{a}$ , с длиной  $|\lambda||\mathbf{a}|$ , однонаправленный с  $\mathbf{a}$  при  $\lambda > 0$  и противоположно направленный при  $\lambda < 0$ . Умножение вектора на число 0 дает нулевой вектор  $\mathbf{0}$ .

*Скалярным произведением* двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  называют скаляр

$$\lambda = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta = ab \cos \theta,$$

где  $\theta$  — наименьший угол между векторами.

*Векторным произведением  $\mathbf{a}$  на  $\mathbf{b}$*  называют вектор  $\mathbf{c}$ , заданный формулой

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} = (ab \sin \theta) \mathbf{n},$$

где  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , меньший чем  $\pi$ , а  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, перпендикулярный к их плоскости и направленный так, что поворот по правилу правой руки вокруг  $\mathbf{n}$  на угол  $\theta$  переводит  $\mathbf{a}$  в  $\mathbf{b}$ . Модуль вектора  $\mathbf{c}$  численно равен площади параллелограмма со смежными сторонами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Последнее равенство в проекциях на оси выбранной системы координат имеет вид

$$c_i = e_{ijk} a_j b_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3,$$

где  $e_{ijk}$  — символ *Левы-Чивиты*;  $e_{ijk} = 1$ , если индексы  $ijk$  образуют четную перестановку 123, 312 или 231,  $e_{ijk} = -1$ , если индексы образуют нечетную перестановку 213, 132 или 321 и, наконец,  $e_{ijk} = 0$ , если среди индексов есть одинаковые.

*Смешанным произведением* называют скалярное произведение двух векторов, один из которых сам является векторным произведением, т. е.

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \lambda.$$

Очевидно, что векторное умножение должно выполняться первым. В проекциях на оси координат последнее равенство принимает вид

$$\lambda = e_{ijk} a_i b_j c_k.$$

*Двойное векторное произведение* — это векторное произведение двух векторов, один из которых сам является векторным произведением:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{w},$$

и результирующий вектор  $\mathbf{w}$  лежит в плоскости векторов  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ .

Для лучшего восприятия последующего материала напомним правило умножения матрицы-столбца на матрицу-строку, известное из курса аналитической геометрии:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} (b_1, b_2, \dots, b_n) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m b_1 & a_m b_2 & \dots & a_m b_n \end{pmatrix}.$$

Результатом умножения будет прямоугольная матрица, имеющая  $m$  строк и  $n$  столбцов. Если положить  $m = n = 3$ , то матрица будет квадратной порядка 3.

Пусть мы имеем два вектора —  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{b} = b_j \mathbf{e}_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Примем  $a_i$  и  $b_j$  за элементы матрицы-столбца и матрицы-строки соответственно. Тогда произведение этих матриц

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что  $C_{ij} = a_i b_j$  определены как произведения всех проекций векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  на оси выбранной декартовой прямоугольной системы координат и, следовательно,  $C_{ij}$  будут различны при переходе преобразованием поворота от одной системы координат к другой.

По аналогии с рассмотренной операцией умножения матрицы-столбца на матрицу-строку введем операцию *диадного умножения* двух векторов:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \hat{\mathbf{C}}, \quad (1.6)$$

результатом которой будет *тензор второго ранга*  $\hat{\mathbf{C}}$  с компонентами  $C_{ij}$ . Операцию диадного умножения в (1.6) записывают еще и иначе:

$$a_i b_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = C_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \hat{\mathbf{C}}, \quad (1.7)$$

причем наличие в формуле (1.7) множителя  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  подчеркивает связь компонентов тензора второго ранга с выбранной системой координат. Заметим, что ранг тензора определяется числом неодинаковых индексов при записи компонентов этого тензора. Таким образом, скаляр и вектор можно считать тензорами нулевого и первого ранга соответственно. Формулы (1.6) и (1.7) представляют собой одно из определений тензора второго ранга.

Другое определение тензора второго ранга может быть сформулировано на основе следующих соображений. Пусть  $a_i$  и  $b_i$  — проекции векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  на оси выбранной системы координат соответственно, а  $C_{ij}$  — элементы квадратной матрицы порядка 3. Тогда, если для любого вектора  $\mathbf{a}$

соотношения

$$b_i = C_{ij}a_j$$

определяют проекции вектора  $\mathbf{b}$  на оси той же системы координат, то  $C_{ij}$  являются компонентами тензора второго ранга  $\widehat{\mathbf{C}}$  в принятой системе координат. Операцию сопоставления вектору  $\mathbf{a}$  вектора  $\mathbf{b}$  иногда называют *умножением справа* тензора на вектор.

Естественно, что при переходе от одной системы координат к другой преобразованием поворота  $C_{ij}$  должны подчиняться закону преобразования, обеспечивающему преобразование  $b_i$  как проекций вектора, т. е. по правилу из (1.5) в предположении, что  $a_j$  преобразуются по этому же правилу. Очевидно, что

$$b'_l = \alpha_{lj}b_j = \alpha_{lj}C_{jk}a_k, \quad a_k = \alpha_{km}a'_m,$$

откуда следует

$$b'_l = \alpha_{lj}C_{jk}\alpha_{km}a'_m = C'_{lm}a'_m,$$

где

$$C'_{lm} = \alpha_{lj}C_{jk}\alpha_{km}. \quad (1.8)$$

На основании сказанного тензор второго ранга можно определить как математический объект, компоненты которого при преобразовании поворота одной системы координат относительно другой будут соответствовать соотношениям (1.8).

Если в качестве сомножителей в диадном произведении (1.6) приняты орты  $\mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{e}_j$ , то в результате получим единичный тензор второго ранга:

$$\widehat{\mathbf{I}} = \delta_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j,$$

компоненты которого  $\delta_{ij}$  называют дельтой Кронекера;  $\delta_{ij} = 1$ , если  $i = j$ , и  $\delta_{ij} = 0$ , если  $i \neq j$ . С учетом сказанного, равенства (1.4) дают возможность получить известные соотношения между косинусами углов, образованных осями новой и старой систем координат:

$$\mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{e}'_j = \alpha_{ik}\alpha_{jm}\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m = \alpha_{ik}\alpha_{jk}\widehat{\mathbf{I}},$$

$$\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m = \alpha_{kl}\alpha_{mn}\mathbf{e}'_l \otimes \mathbf{e}'_n = \alpha_{kn}\alpha_{mn}\widehat{\mathbf{I}}.$$

Далее по аналогии можно ввести в рассмотрение и тензоры более высоких рангов, а именно: величина  $\widehat{\mathbf{C}} = C_{i_1 i_2 \dots i_n} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \dots \otimes \mathbf{e}_{i_n}$  определяет *тензор  $n$ -го ранга*, если его компоненты при повороте системы координат подчиняются закону преобразования

$$C'_{j_1 j_2 \dots j_n} = C_{i_1 i_2 \dots i_n} \alpha_{j_1 i_1} \alpha_{j_2 i_2} \dots \alpha_{j_n i_n}. \quad (1.9)$$

Если при записи компонентов тензора индекс употреблен дважды, то подразумевают, что данный индекс принимает все значения из своего интервала изменения и компоненты тензора, соответствующие каждому значению индекса из такого набора, суммируются. В этом *соглашении о суммировании* повторяющиеся индексы называют *немymi*, так как их замена на любые другие буквы, не используемые в качестве *свободных*



индексов, не изменяет значения компонента тензора, в который они входят. В правильно написанном выражении ни один индекс не встречается более двух раз.

Тензоры одинакового ранга можно складывать (или вычитать) покомпонентно согласно правилу

$$A_{ijk\dots} \pm B_{ijk\dots} = D_{ijk\dots};$$

сумма тензоров есть тензор того же ранга, что и слагаемые. Отметим, что одинаковые индексы расположены в каждом слагаемом в одной и той же последовательности.

Умножение всех компонентов тензора на скаляр дает новый тензор того же ранга, т. е.

$$B_{ij\dots} = \lambda A_{ij\dots}, \quad \text{или} \quad \widehat{\mathbf{B}} = \lambda \widehat{\mathbf{A}}.$$

Если тензору  $\widehat{\mathbf{A}}$  произвольного ранга  $n$  можно поставить в соответствие квадратную матрицу  $A$ , то элементы обратной матрицы  $A^{-1}$  (если она существует) будут соответствовать компонентам тензора  $\widehat{\mathbf{B}}$ . Тогда тензор  $\widehat{\mathbf{B}}$  называют *обратным* по отношению к тензору  $\widehat{\mathbf{A}}$  и  $\widehat{\mathbf{B}} = \widehat{\mathbf{A}}^{-1}$ .

*Внешним произведением* двух тензоров произвольных рангов называют новый тензор, компоненты которого образованы умножением каждого компонента одного тензора на каждый компонент другого. Ранг полученного тензора равен сумме рангов сомножителей:

$$A_{i_1 i_2 \dots i_n} B_{j_1 j_2 \dots j_m} = D_{i_1 i_2 \dots i_n j_1 j_2 \dots j_m},$$

или

$$\begin{aligned} A_{i_1 i_2 \dots i_n} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_n} B_{j_1 j_2 \dots j_m} \mathbf{e}_{j_1} \otimes \mathbf{e}_{j_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_m} = \\ = D_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_m} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_n} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_m}. \end{aligned}$$

*Свертыванием* тензора по двум свободным индексам называют такую операцию, когда два эти индекса обозначают одной и той же буквой, вследствие чего они становятся индексами суммирования (немыми). В результате свертывания получают тензор (свертку), ранг которого на две единицы меньше, чем у исходного. Например, свертки тензора с компонентами  $T_{ij}$ :  $T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$  и результаты диадного умножения двух векторов  $a_i b_j$ :  $a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$  будут скалярами, свертки тензора с компонентами  $E_{ij} a_k$  — векторами:  $E_{ij} a_j = b_i$ ,  $E_{ij} a_i = c_j$ ,  $E_{ii} a_k = d_k$  и далее, свертки тензора с компонентами  $E_{ij} F_{km}$  будут тензорами второго ранга:  $E_{ij} F_{im} = G_{jm}$ ,  $E_{ij} F_{ki} = H_{jk}$ ,  $E_{ii} F_{km} = K_{km}$ ,  $E_{ij} F_{kk} = P_{ij}$ ,  $E_{ij} F_{jm} = Q_{im}$ ,  $E_{ij} F_{kj} = R_{ik}$ .

*Внутренним произведением* двух тензоров называют результат операции свертывания, примененной к их внешнему произведению. При этом совпадающие индексы должны фигурировать по одному разу в каждом из сомножителей. Например:  $a_i b_i = d$ , или  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = d$ ;  $a_i E_{ik} = f_k$ , или  $\mathbf{a} \cdot \widehat{\mathbf{E}} = \mathbf{f}$ ;  $a_i E_{ji} = h_j$ , или  $\widehat{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{h}$ ;  $E_{ij} F_{jk} = H_{ik}$ , или  $\widehat{\mathbf{E}} \cdot \widehat{\mathbf{F}} = \widehat{\mathbf{H}}$ .

Иногда используют свертки тензоров четвертого и более высокого рангов по нескольким парам индексов. Так, свертка тензора четвертого ранга с компонентами  $H_{ijkl} = E_{ij}F_{km}$  будет скаляром  $c = E_{ij}F_{ij}$ , или  $c = \widehat{\mathbf{E}} \cdot \widehat{\mathbf{F}}$ , а свертка тензора шестого ранга с компонентами  $H_{ijklmn} = E_{ijkl}F_{mn}$  будет тензором второго ранга с компонентами  $G_{ij} = E_{ijkl}F_{kl}$ , или  $\widehat{\mathbf{G}} = \widehat{\mathbf{E}} \cdot \widehat{\mathbf{F}}$ , и т. д.

Если у компонентов некоторого тензора  $\widehat{\mathbf{A}}$  переставить произвольным образом один или несколько индексов, то полученные таким образом компоненты образуют новый тензор  $\widehat{\mathbf{B}}$ , а эту операцию называют *подстановкой индексов*.

Изменение порядка следования индексов у тензора второго ранга  $\widehat{\mathbf{A}}$  эквивалентно перемене местами строк и столбцов в соответствующей ему матрице  $A$  (если она существует). Поэтому операцию симметрирования тензора второго ранга  $\widehat{\mathbf{A}}$  будем записывать следующим образом:

$$B_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}), \quad \text{или} \quad \widehat{\mathbf{B}} = \frac{1}{2}(\widehat{\mathbf{A}}^T + \widehat{\mathbf{A}}),$$

где  $\widehat{\mathbf{A}}^T$  — тензор, компоненты которого соответствуют элементам матрицы  $A^T$ .

Операцию симметрирования обозначают взятием индексов, по которым она производится, в круглые скобки, т. е.

$$B_{(ijk\dots)} = A_{(ij)k\dots}$$

Операцию симметрирования по трем индексам определяют следующим образом:

$$S_{(ijk)} \equiv \frac{1}{6}(S_{ijk} + S_{kij} + S_{jki} + S_{jik} + S_{kji} + S_{ikj}).$$

В общем случае операцию *симметрирования* по  $n$  индексам определяют как

$$S_{i_1 i_2 \dots i_n} \equiv \frac{1}{n!}(S_{i_1 i_2 \dots i_n} + S_{i_n i_1 \dots i_{n-1}} + \dots).$$

Операцию *альтернирования* (или *антисимметрирования*, *кососимметрирования*) тензора  $\widehat{\mathbf{A}}$  по двум индексам обозначают взятием этих индексов в угловые скобки и определяют следующим образом:

$$A_{\langle ij \rangle} \equiv \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji}).$$

Аналогично определяют операцию *альтернирования* по  $n$  индексам ( $n \geq 2$ ):

$$S_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle} \equiv \frac{1}{n!}(S_{i_1 i_2 \dots i_n} + S_{i_n i_1 \dots i_{n-1}} + \dots),$$

где в правой части в скобках стоит сумма  $n!/2$  слагаемых со знаком плюс с четными подстановками индексов  $i_1 i_2 \dots, i_n$  и  $n!/2$  слагаемых со знаком минус с нечетными подстановками этих индексов.

Рассмотрим объект третьего ранга  $A_{ijk}$ , образованный следующим образом:  $A_{ijk} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{kr}e_{pqr}$ , где  $e_{pqr}$  — символ Леви–Чивиты. Этот объект обладает следующими свойствами: если среди индексов  $ijk$  хотя бы два принимают одинаковые числовые значения, то соответствующие элементы объекта  $A_{ijk}$  равны нулю, так как  $A_{ikk} = \alpha_{ip}\alpha_{kq}\alpha_{kr}e_{pqr} = \alpha_{i1}\alpha_{j2}\alpha_{j3} + \alpha_{i3}\alpha_{j1}\alpha_{j2} + \alpha_{i2}\alpha_{j3}\alpha_{j1} - \alpha_{i1}\alpha_{j3}\alpha_{j2} - \alpha_{i3}\alpha_{j2}\alpha_{j1} - \alpha_{i2}\alpha_{j1}\alpha_{j3} = 0$ ; если индексы  $ijk$  образуют четную перестановку чисел 1, 2 и 3, то элементы  $A_{ijk} = \det(\alpha_{pq})$ ; если  $ijk$  образуют нечетную перестановку чисел 1, 2 и 3, то  $A_{ijk} = -\det(\alpha_{pq})$ . Тогда на основании указанных свойств

$$A_{ijk} = \alpha e_{ijk},$$

где  $\alpha = \det(\alpha_{pq})$  и, следовательно,

$$\alpha e_{ijk} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{kr}e_{pqr}. \quad (1.10)$$

Поскольку формула (1.10) установлена в одной системе координат, то  $e_{ijk}$  и  $e_{pqr}$  — один и тот же объект. Следовательно, закон преобразования (1.9) не обеспечивает неизменности компонентов  $e_{pqr}$  во всех системах координат. Для ее достижения необходимо принять закон преобразования в виде

$$\bar{e}_{ijk} = \frac{1}{\alpha} \alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{kr}e_{pqr}.$$

Этот закон преобразования отличается от тензорного наличием множителя  $1/\alpha$ , поэтому всякий объект, закон преобразования которого отличается от тензорного множителем  $(1/\alpha)^m$ , называют *ортогональным псевдотензором*, а целое число  $m > 0$  — весом псевдотензора. В тех случаях, когда необходимо подчеркнуть различие между тензорами и псевдотензорами, первые называют *истинными тензорами*. Отметим, что дельта Кронекера  $\delta_{ij}$  представляет собой компоненты истинного тензора, а символ Леви–Чивиты, в соответствии с указанным выше, — псевдотензора.

**1.2. Тензорные поля. Дифференцирование и интегрирование тензоров.** *Тензорное поле* ставит в соответствие каждой точке пространства и каждому моменту времени  $(\mathbf{x}, t)$  тензор  $\hat{\mathbf{T}}(x_1, x_2, x_3, t)$ , где радиус-вектор  $\mathbf{x}$  меняется в заданной области пространства, а  $t$  — в заданном интервале времени. Тензорное поле называют непрерывно дифференцируемым, если компоненты тензора  $\hat{\mathbf{T}}(x_1, x_2, x_3, t)$  являются непрерывно дифференцируемыми функциями  $\mathbf{x}$  и  $t$ . Если компоненты тензора  $\hat{\mathbf{T}}$  зависят только от  $\mathbf{x}$ , то тензорное поле называют *стационарным*.

В ортогональной декартовой системе координат, где радиус-вектор любой точки имеет вид (1.2), поля тензоров различного ранга можно записать в индексных и безындексных обозначениях. Например, скалярное поле  $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ , или  $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$ ; векторное поле  $v_i = v_i(x_1, x_2, x_3, t)$ , или  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ; поле тензора второго ранга  $T_{ij} = T_{ij}(x_1, x_2, x_3, t)$ , или  $\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t)$  и т. д.

Из математического анализа известны основные дифференциальные операции над скалярными и векторными функциями. Так, градиент скалярной функции (скалярного поля)

$$\text{grad } \varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mathbf{e}_i,$$

или

$$\text{grad } \varphi(\mathbf{x}, t) \equiv \nabla_{\mathbf{x}} \varphi = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi. \quad (1.11)$$

Дифференциальный оператор  $\nabla_{\mathbf{x}} = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  в (1.11) можно рассматривать как вектор с компонентами  $\partial/\partial x_i$ , а процедуру вычисления  $\text{grad } \varphi(\mathbf{x}, t)$  — как процедуру умножения вектора на скаляр.

Следующая операция — вычисление дивергенции векторной функции:

$$\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i},$$

или

$$\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \equiv \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (1.12)$$

В выражениях (1.12) операцию  $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  можно рассматривать как операцию скалярного умножения вектора  $\nabla_{\mathbf{x}} = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  на вектор  $v_i \mathbf{e}_i$ .

Отметим, что

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\varphi(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = (\nabla_{\mathbf{x}} \varphi) \cdot \mathbf{v} + \varphi (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}).$$

И, наконец, последняя из дифференциальных операций, известная из теории поля, — вычисление ротора векторной функции:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) &= \text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \\ &= \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3 \equiv \nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{v}, \end{aligned}$$

или

$$w_i = e_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} v_k.$$

Рассмотренные простейшие дифференциальные операции можно обобщить. Если мы имеем векторное поле  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ , то *градиент вектора*  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  представляет собой тензор второго ранга — диадное произведение вектора  $\nabla_{\mathbf{x}}$  на вектор  $\mathbf{v}$ :

$$\widehat{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{v} = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes v_j \mathbf{e}_j = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \equiv \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}.$$

Градиент векторной функции  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  также можно получить, образовав диадное произведение вектора  $\mathbf{v}$  на вектор — дифференциальный

оператор  $e_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ :

$$\widehat{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v} \otimes \nabla_{\mathbf{x}} = v_i \mathbf{e}_i \otimes e_j \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \equiv \mathbf{v} \nabla_{\mathbf{x}}.$$

Наиболее употребляемыми формами записи тензоров второго ранга — градиентов векторной функции — являются

$$\widehat{\mathbf{W}} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} \quad \text{и} \quad \widehat{\mathbf{U}} = \mathbf{v} \nabla_{\mathbf{x}}.$$

Их мы и будем использовать. Очевидно, что

$$\widehat{\mathbf{U}} = \widehat{\mathbf{W}}^T.$$

Операцию вычисления градиента можно обобщить и на тензорное поле  $\widehat{\mathbf{T}} = \widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t)$ . В результате получим

$$\widehat{\mathbf{R}} = \nabla_{\mathbf{x}} \widehat{\mathbf{T}} \quad \text{и} \quad \widehat{\mathbf{Q}} = \widehat{\mathbf{T}} \nabla_{\mathbf{x}}$$

— тензоры, ранг которых на единицу больше ранга тензора  $\widehat{\mathbf{T}}$ :

$$R_{i_1 i_2 \dots i_n} = \frac{\partial T_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}}{\partial x_{i_n}} \quad \text{и} \quad Q_{i_1 i_2 \dots i_n} = \frac{\partial T_{i_2 i_3 \dots i_n}}{\partial x_{i_1}},$$

или

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{R}} &= \frac{\partial T_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}}{\partial x_{i_n}} \mathbf{e}_{i_n} \otimes \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_{n-1}}, \\ \widehat{\mathbf{Q}} &= \frac{\partial T_{i_2 i_3 \dots i_n}}{\partial x_{i_1}} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_n}, \\ & i_1, i_2, \dots, i_n = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Нахождение *дивергенции поля тензора второго ранга*  $\widehat{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, t) = W_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  будем рассматривать как операцию вычисления внутреннего произведения дифференциального оператора (вектора)  $\nabla_{\mathbf{x}} = e_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  на тензор  $\widehat{\mathbf{W}}$ . В результате получим вектор

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \widehat{\mathbf{W}} = \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i} \mathbf{e}_j, \quad \text{или} \quad u_j(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_i}.$$

Если необходимо вычислить *дивергенцию поля тензора  $\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t)$  произвольного ранга*, то результатом будет новый тензор, ранг которого на единицу меньше ранга тензора  $\widehat{\mathbf{T}}$ :

$$\widehat{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \widehat{\mathbf{T}} = \frac{\partial T_{i_1 i_2 \dots i_n}}{\partial x_{i_1}} \mathbf{e}_{i_2} \otimes \mathbf{e}_{i_3} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_n}, \quad i_1, i_2, \dots, i_n = 1, 2, 3.$$

Напомним известные из математического анализа теоремы Стокса и Остроградского–Гаусса. Первая утверждает, что для непрерывно дифференцируемых однозначных векторных функций  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  в некотором объеме пространства  $V$  и на поверхности  $S$ , ограничивающей этот объем ( $V$  —

ограничен и пространственно односвязан,  $S$  — замкнута и регулярна), справедливы следующие соотношения:

$$\int_V \operatorname{rot} \mathbf{v} dV \equiv \int_V \nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{v} dV = \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{v} dS,$$

или

$$\int_V e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} dV = \int_S e_{ijk} n_j v_k dS,$$

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \equiv \int_S \nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x},$$

или

$$\int_S e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} n_i dS = \oint_L v_i dx_i,$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности  $S$ , натянутой на контур  $L$ , а вектор  $d\mathbf{x}$ , касательный к этому контуру, определяет положительное направление контура  $L$ .

Теорема Остроградского–Гаусса утверждает, что для векторного поля  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV \equiv \int_V \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS, \quad \text{или} \quad \int_V \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dV = \int_S n_i v_i dS. \quad (1.13)$$

Теорему Остроградского–Гаусса в форме (1.13) можно обобщить на поля тензоров любого ранга. Так, для произвольного тензорного поля  $\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t) = T_{ij\dots p} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_p$  теорема утверждает, что

$$\int_V \operatorname{div} \hat{\mathbf{T}} dV \equiv \int_V \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{T}} dv = \int_S \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{T}} dS, \quad \text{или} \quad \int_V \frac{\partial T_{ijk\dots}}{\partial x_i} dV = \int_S T_{ijk\dots} n_i dS.$$

Отметим, что теорема Остроградского–Гаусса широко используется в механике сплошной среды.

## 2. ДВИЖЕНИЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ, ТЕОРИИ ДЕФОРМАЦИИ И НАПРЯЖЕНИЙ

**2.1. Эйлеров и лагранжевы способы описания движения сплошной среды.** При изучении движения сплошной среды используют термин “точка”, который может относиться как к точке пространства, так и к точке сплошной среды. В дальнейшем слово “точка” будет применяться только для обозначения места в неподвижном пространстве. Для обозначения малого элемента сплошной среды будем использовать слово “частица” (или слова “материальная точка”). Таким образом, *точка* — место в пространстве, а *частица (материальная точка)* — малая часть материального континуума, т. е. непрерывно заполненного материей пространства.

В любой момент времени  $t$  объем  $V$  сплошной среды, ограниченный поверхностью  $S$ , занимает некоторую область пространства. Если в заданной системе координат в момент времени  $t$  установлено соответствие частиц некоторого объема сплошной среды и точек пространства, то это означает, что указана *конфигурация* сплошной среды. Непрерывный переход от *начальной*, в момент времени  $t_0$ , конфигурации сплошной среды к некоторой последующей (*актуальной*), сопровождаемый изменением расстояний между частицами объема сплошной среды, носит название *процесса деформации*. При изучении процесса деформации учитывают только начальную и конечную конфигурации. Промежуточные состояния, или последовательность конфигураций, через которые происходит деформация, при этом не рассматриваются. Используемый в дальнейшем термин *течение* служит для обозначения непрерывного (или мгновенного) состояния движения континуума. Изучение истории изменения конфигурации сплошной среды является частью исследования течения, для которого задано переменное во времени и в пространстве поле скоростей.

Предположим, что в начальный момент времени  $t = t_0$  частица сплошной среды находится в точке  $P_0$  пространства, определяемой радиусом-вектором  $\mathbf{a}$ , который имеет проекции  $a_I$  ( $I = 1, 2, 3$ ) на оси прямоугольной декартовой системы координат (рис. 2.1). Координаты  $a_1, a_2, a_3$ , определяющие положение частицы сплошной среды в начальный момент времени, называют *материальными*. В деформированном состоянии частица сплошной среды, находившаяся в начальный момент времени в точке  $P_0$ , займет положение  $P$ , определяемое радиусом-вектором  $\mathbf{x}$  с проекциями  $x_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) на оси другой прямоугольной декартовой системы координат. Координаты  $x_1, x_2, x_3$ , задающие положение частицы в актуальной конфигурации, называют *пространственными* (рис. 2.1).

Ориентация системы материальных осей  $Oa_1a_2a_3$  относительно системы пространственных осей  $Ox_1x_2x_3$  задается направляющими косинусами

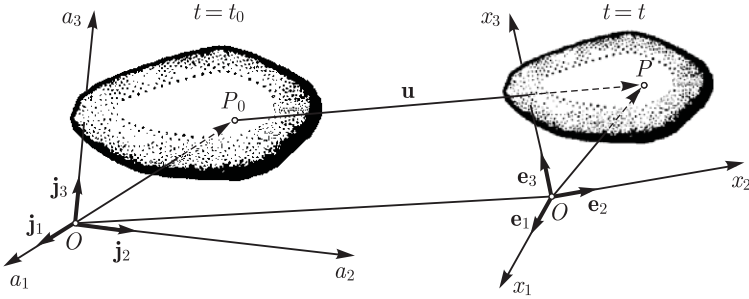


Рис. 2.1.

$\alpha_{Ik}$  и  $\alpha_{kI}$ . Направляющие косинусы определяются как скалярные произведения единичных векторов принятых систем координат:

$$\alpha_{kI} = \alpha_{Ik} = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{j}_I = \mathbf{j}_I \cdot \mathbf{e}_k. \quad (2.1)$$

Условия ортогональности осей пространственной и материальной систем координат имеют вид

$$\alpha_{Ik} \alpha_{kM} = \alpha_{kI} \alpha_{Mk} = \delta_{IM}, \quad \alpha_{iK} \alpha_{Km} = \alpha_{Ki} \alpha_{mK} = \delta_{im}, \quad (2.2)$$

где  $\delta_{IM}, \delta_{im}$  — компоненты единичного тензора (дельта Кронекера),  $\delta_{IM} = 1$  ( $\delta_{im} = 1$ ), если  $I = M$  ( $i = m$ ), и  $\delta_{IM} = 0$  ( $\delta_{im} = 0$ ), если  $I \neq M$  ( $i \neq m$ ); здесь и далее в формулах подразумевается суммирование по повторяющимся латинским индексам  $i, I, j, J, k, K, \dots$

Вектор  $\mathbf{u}(a_1, a_2, a_3, t)$ , соединяющий точки  $P_0$  и  $P$  на рис. 2.1, называют вектором перемещения. Компоненты этого вектора в материальной системе координат  $Oa_1a_2a_3$  — функции материальных координат и времени,  $u_K(a_1, a_2, a_3, t)$  и

$$\mathbf{u}(a_1, a_2, a_3, t) = u_K(a_1, a_2, a_3, t) \mathbf{j}_K, \quad (2.3)$$

где  $\mathbf{j}_K$  — базисные орты системы координат  $Oa_1a_2a_3$ .

Обозначим этот вектор перемещения в пространственной системе координат  $ox_1x_2x_3$  через  $\mathbf{U}(x_1, x_2, x_3, t)$ . Если  $U_k(x_1, x_2, x_3, t)$  — компоненты вектора перемещения в пространственной системе координат, то

$$\mathbf{U}(x_1, x_2, x_3, t) = U_k(x_1, x_2, x_3, t) \mathbf{e}_k, \quad (2.4)$$

где  $\mathbf{e}_k$  — базисные орты системы координат  $ox_1x_2x_3$ .

Вектор  $\mathbf{b}$  (рис. 2.1) определяет положение начала координат  $o$  относительно точки  $O$ . Очевидно, что

$$\mathbf{u} = \mathbf{b} + \mathbf{x} - \mathbf{a}.$$

В дальнейшем, без потери общности изложения материала, будем полагать  $\mathbf{b} \equiv \mathbf{0}$  и оси координат  $a_I$  и  $x_i$  — совмещенными,  $\mathbf{j}_K \equiv \mathbf{e}_k$ , т. е.

$$u_k = x_k - a_k = U_k, \quad \text{или} \quad \mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{a} = \mathbf{U}. \quad (2.5)$$



Движение частиц сплошной среды в пространстве можно описать с помощью уравнений вида

$$x_i = x_i(a_1, a_2, a_3, t) \quad (i = 1, 2, 3), \quad \text{или} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{a}, t), \quad (2.6)$$

которые задают в пространстве положение частицы, занимавшей в исходной конфигурации положение с координатами  $a_1, a_2, a_3$ . Такой способ описания движения или деформации называют *лагранжевым*, а материальные координаты  $a_i$  — *лагранжевыми координатами*.

Если при изучении движения материальных точек воспользоваться уравнениями вида

$$a_i = a_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (i = 1, 2, 3), \quad \text{или} \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t), \quad (2.7)$$

в которых независимыми являются координаты точек пространства  $x_i$  и время  $t$ , то способ описания движения сплошной среды называют *эйлеровым*, а координаты  $x_1, x_2, x_3$  — *эйлеровыми координатами*. Смысл данного способа описания движения сплошной среды заключается в том, что он дает возможность установить начальное положение частицы, находящейся в момент времени  $t$  в заданной точке пространства.

Таким образом, при лагранжевом способе описания движения сплошной среды изучается поведение материальной точки этой среды, а при эйлеровом — поведение сплошной среды в точке пространства.

В дальнейшем полагаем, что функции  $x_i(a_1, a_2, a_3, t)$  и  $a_i(x_1, x_2, x_3, t)$  всегда непрерывно дифференцируемы. Эти функции взаимно обратны. Необходимым и достаточным условием существования обратной функции является отличие от нуля *якобиана*

$$J = \det \frac{\partial x_i}{\partial a_k}. \quad (2.8)$$

Если якобиан  $J \neq 0$ , а  $|\mathbf{da}|$  — расстояние между двумя бесконечно близкими материальными точками в исходной конфигурации, то эти материальные точки будут оставаться бесконечно близкими и в актуальной конфигурации с расстоянием  $|d\mathbf{x}|$  между ними, т. е.

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial a_k} da_k.$$

Отсюда следует, что конечные объемы в результате деформации не могут преобразовываться в материальные точки и наоборот.

**2.2. Тензоры деформации при эйлеровом и лагранжевом способах описания движения сплошной среды.** Продифференцировав первую группу уравнений из (2.6) по материальным координатам  $a_k$ , получим тензор второго ранга с компонентами  $F_{ik} = \partial x_i / \partial a_k$ , который называется *материальным градиентом деформации*, или

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{x} \nabla_{\mathbf{a}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial a_1} \otimes \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial a_2} \otimes \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial a_3} \otimes \mathbf{e}_3 = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.9)$$

Если продифференцировать первую группу уравнений из (2.7) по пространственным координатам  $x_k$ , то получим тензор второго ранга с компонентами  $H_{ik} = \partial a_i / \partial x_k$ , который называют *пространственным градиентом деформации*, или

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{a} \nabla_{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_1} \otimes \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_2} \otimes \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_3} \otimes \mathbf{e}_3 = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad (2.10)$$

где  $\nabla_{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i$ .

Материальный и пространственный градиенты деформации связаны между собой соотношениями

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_k} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} = \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial a_j} = \delta_{ij}. \quad (2.11)$$

При изучении деформации сплошной среды рассмотрим изменение положения двух бесконечно близких в исходной конфигурации материальных точек  $P_0$  и  $Q_0$  (рис. 2.2). Эти материальные точки в некоторой актуальной

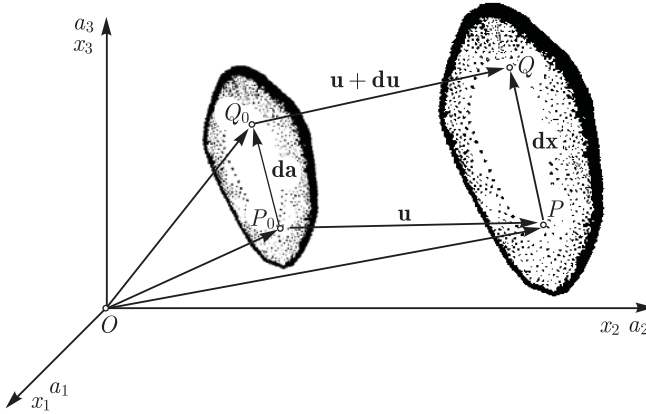


Рис. 2.2.

(конечной) конфигурации занимают пространственное положение  $P$  и  $Q$  соответственно.

Расстояние  $|da|$  между точками  $P_0$  и  $Q_0$  может быть найдено из равенства

$$(\mathbf{da})^2 = da_i da_i = \delta_{ij} da_i da_j. \quad (2.12)$$

Определим компоненты  $da_i$  вектора  $da$  путем дифференцирования уравнений (2.7) по пространственным координатам, т. е.  $da_i = (\partial a_i / \partial x_k) dx_k$ . Тогда квадрат расстояния между точками  $P_0$  и  $Q_0$  будет равен

$$(\mathbf{da})^2 = \delta_{km} \frac{\partial a_k}{\partial x_i} dx_i \frac{\partial a_m}{\partial x_j} dx_j = \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} dx_i dx_j = C_{ij} dx_i dx_j,$$

или

$$(d\mathbf{a})^2 = d\mathbf{x}^T \cdot \widehat{\mathbf{C}} \cdot d\mathbf{x}, \quad (2.13)$$

где тензор второго ранга с компонентами

$$C_{ij} = \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial a_k}{\partial x_j}, \quad \text{или} \quad \widehat{\mathbf{C}} = \widehat{\mathbf{H}}^T \cdot \widehat{\mathbf{H}},$$

называют *тензором деформации Коши*. Здесь и далее одна точка между тензорами означает операцию свертки по одному индексу.

Расстояние  $|d\mathbf{x}|$  между двумя бесконечно близкими точками  $P$  и  $Q$  в актуальной конфигурации найдем из равенства

$$(d\mathbf{x})^2 = dx_i dx_i = \delta_{ij} dx_i dx_j. \quad (2.14)$$

Тогда аналогично выражению (1.13)

$$(d\mathbf{x})^2 = \delta_{km} \frac{\partial x_k}{\partial a_i} da_i \frac{\partial x_m}{\partial a_j} da_j = \frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial x_k}{\partial a_j} da_i da_j = G_{ij} da_i da_j,$$

или

$$(d\mathbf{x})^2 = d\mathbf{a}^T \cdot \widehat{\mathbf{G}} \cdot d\mathbf{a}, \quad (2.15)$$

где тензор второго ранга с компонентами

$$G_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial x_k}{\partial a_j}, \quad \text{или} \quad \widehat{\mathbf{G}} = \widehat{\mathbf{F}}^T \cdot \widehat{\mathbf{F}},$$

называют *тензором деформации Грина*.

Верхний индекс “Т” означает операцию транспонирования, т. е. компоненты тензора  $\widehat{\mathbf{F}}^T$  (или  $\widehat{\mathbf{H}}^T$ ) образуют матрицу, элементы которой соответствуют элементам транспонированной матрицы, образованной из компонентов тензора  $\widehat{\mathbf{F}}$  (или  $\widehat{\mathbf{H}}$ ). Отметим, что тензоры второго ранга  $\widehat{\mathbf{F}}$  и  $\widehat{\mathbf{H}}$  связаны соотношением  $\widehat{\mathbf{F}}^{-1} = \widehat{\mathbf{H}}$ .

Разность квадратов расстояний между двумя бесконечно близкими материальными точками определяет *меру деформации* окрестности этих точек при переходе от начальной конфигурации к последующей. Если сплошная среда совершает перемещение как *абсолютно твердое тело*, то  $(d\mathbf{x})^2 - (d\mathbf{a})^2 \equiv 0$ .

С помощью равенств (2.12)–(2.15) разность  $(d\mathbf{x})^2 - (d\mathbf{a})^2$  можно представить в различных формах. Если воспользоваться соотношениями (2.12) и (2.15), то

$$(d\mathbf{x})^2 - (d\mathbf{a})^2 = \left( \frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial x_k}{\partial a_i} - \delta_{ij} \right) da_i da_j = 2L_{ij} da_i da_j,$$

или

$$(d\mathbf{x})^2 - (d\mathbf{a})^2 = d\mathbf{a}^T \cdot (\widehat{\mathbf{F}}^T \cdot \widehat{\mathbf{F}} - \widehat{\mathbf{I}}) \cdot d\mathbf{a} = d\mathbf{a}^T \cdot 2\widehat{\mathbf{L}} \cdot d\mathbf{a}, \quad (2.16)$$

где  $\widehat{\mathbf{I}}$  — тензор второго ранга с компонентами  $\delta_{ij}$ .

Тензор второго ранга с компонентами

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial x_k}{\partial a_j} - \delta_{ij} \right), \quad \text{или} \quad \widehat{\mathbf{L}} = \frac{1}{2} \left( \widehat{\mathbf{F}}^T \cdot \widehat{\mathbf{F}} - \widehat{\mathbf{I}} \right), \quad (2.17)$$

называют *тензором конечной деформации Грина* (лагранжевым тензором конечной деформации).

При использовании соотношений (2.13) и (2.14) ту же разность можно представить иначе:

$$(d\mathbf{x})^2 - (d\mathbf{a})^2 = \left( \delta_{ij} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j = 2E_{ij} dx_i dx_j,$$

или

$$(d\mathbf{x})^2 - (d\mathbf{a})^2 = d\mathbf{x}^T \cdot \left( \hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{H}}^T \cdot \hat{\mathbf{H}} \right) \cdot d\mathbf{x}. \quad (2.18)$$

Тензор второго ранга с компонентами

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \right), \quad \text{или} \quad \hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \left( \hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{H}}^T \cdot \hat{\mathbf{H}} \right), \quad (2.19)$$

называют *тензором конечной деформации Альманзи* (эйлеровым тензором конечной деформации).

Компоненты тензоров конечной деформации  $L_{ij}$  и  $E_{ij}$  с помощью соотношений (2.3) или (2.4) могут быть выражены через функции  $u_k(a_1, a_2, a_3, t)$  или  $U_k(x_1, x_2, x_3, t)$ , т. е.

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \frac{\partial u_k}{\partial a_j} \right), \quad \text{или} \quad \hat{\mathbf{L}} = \frac{1}{2} \left( \hat{\mathbf{J}}^T + \hat{\mathbf{J}} + \hat{\mathbf{J}}^T \cdot \hat{\mathbf{J}} \right), \quad (2.20)$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \right), \quad \text{или} \quad \hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \left( \hat{\mathbf{K}}^T + \hat{\mathbf{K}} - \hat{\mathbf{K}}^T \cdot \hat{\mathbf{K}} \right). \quad (2.21)$$

При записи соотношений (2.20) и (2.21) учтено, что  $\partial a_k / \partial a_i = 1$  и  $\partial x_k / \partial x_i = 1$  при  $i = k$ . В противном случае  $\partial a_k / \partial a_i = 0$  и  $\partial x_k / \partial x_i = 0$ . Тензоры  $\hat{\mathbf{J}}$  с компонентами  $\partial u_i / \partial a_j$  и  $\hat{\mathbf{K}}$  с компонентами  $\partial U_i / \partial x_j$  называют *материальным градиентом перемещения* и *пространственным градиентом перемещения*, соответственно.

### 2.3. Тензор малой деформации. Условия совместности деформаций.

Предположим, что в процессе перехода некоторого объема сплошной среды от начальной конфигурации в момент времени  $t_0$  к актуальной в момент времени  $t$  градиенты перемещения малы по сравнению с единицей, т. е.  $\|\partial u_i / \partial a_j\| \ll 1$  и  $\|\partial U_i / \partial x_j\| \ll 1$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), где  $\|\cdot\|$  — евклидова норма матрицы ( $\|\beta_{ij}\| = \sqrt{\beta_{ij}\beta_{ij}}$ ), элементами которой являются соответствующие компоненты рассматриваемого тензора. Тогда описание деформирования сплошной среды может быть проведено с использованием теории малой деформации. В этом случае вместо тензора конечной деформации Грина используют *лагранжев тензор малой деформации* с компонентами

$$l_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right), \quad \text{или} \quad \hat{\mathbf{I}} = \frac{1}{2} \left( \hat{\mathbf{J}}^T + \hat{\mathbf{J}} \right), \quad (2.22)$$

а вместо тензора конечной деформации Альманзи — *эйлеров тензор малой деформации* с компонентами

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \quad \text{или} \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{K}}^T + \hat{\mathbf{K}}). \quad (2.23)$$

Для широкого класса задач механики сплошной среды — задач механики деформируемого твердого тела — характерна малость не только градиентов перемещения, но и модуля  $|\mathbf{u}|$  (или  $|\mathbf{U}|$ ) по сравнению с характерным размером тела  $h$ , т. е.  $|\mathbf{u}|/h \ll 1$  (или  $|\mathbf{U}|/h \ll 1$ ). В этом случае различие между пространственными и материальными координатами мало, а лагранжев и эйлеров тензоры малой деформации можно полагать равными, т. е.

$$l_{ij} = \varepsilon_{ij}, \quad \text{или} \quad \hat{\mathbf{I}} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (2.24)$$

Формулы (2.22) и (2.23) для тензоров малой деформации носят название *соотношений Коши*.

Тензор второго ранга — материальный градиент перемещения с компонентами  $\partial u_i / \partial a_j$  — можно представить в виде суммы двух тензоров:

$$\frac{\partial u_i}{\partial a_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial a_j} - \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right),$$

или

$$\hat{\mathbf{J}}^T = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{J}}^T + \hat{\mathbf{J}}) + \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{J}}^T - \hat{\mathbf{J}}). \quad (2.25)$$

Очевидно, что первое слагаемое в скобках в формулах (2.25) определяет лагранжев тензор малой деформации. Второе слагаемое в скобках в формулах (2.25) называют *лагранжевым тензором линейного поворота* и обозначают

$$w_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial a_j} - \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right),$$

или

$$\hat{\boldsymbol{w}} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{J}}^T - \hat{\mathbf{J}}). \quad (2.26)$$

Если тензор деформации  $\hat{\mathbf{I}}$  в окрестности точки  $P_0$  тождественно равен нулю, то относительное перемещение окрестности этой точки  $d\mathbf{u} = d\mathbf{x} - d\mathbf{a} = \mathbf{u}_{(Q_0)} - \mathbf{u}_{(P_0)}$  (рис. 2.3) будет малым поворотом абсолютно твердого тела. Этот малый поворот можно представить *лагранжевым вектором линейного поворота*

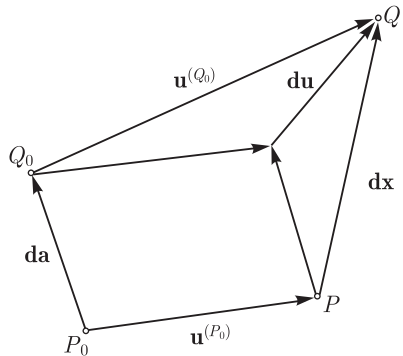


Рис. 2.3.

$$\omega_i = \frac{1}{2} e_{ijk} w_{kj}, \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{a}} \times \mathbf{u}, \quad (2.27)$$

где  $e_{ijk}$  — символы Леви-Чивиты;  $e_{ijk} = 1$ , если индексы  $i, j, k$  образуют четную перестановку (123, 312, 231),  $e_{ijk} = -1$ , если этот порядок нарушен, и  $e_{ijk} = 0$ , если среди индексов есть одинаковые. Тогда компоненты соответствующего вектора относительного перемещения будут иметь следующий вид:

$$du_i = e_{ijk}\omega_j da_k, \quad \text{или} \quad d\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{a}. \quad (2.28)$$

Очевидно, что рассуждения, проведенные при лагранжевом описании вектора относительного перемещения, тензора линейного поворота и вектора линейного поворота, можно полностью повторить для эйлеровых аналогов тех же величин. При этом для вектора относительного перемещения имеем

$$dU_i = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} dx_j, \quad \text{или} \quad d\mathbf{U} = \widehat{\mathbf{K}} \cdot d\mathbf{x}; \quad (2.29)$$

для эйлерова тензора линейного поворота

$$\Psi_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \quad \text{или} \quad \widehat{\Psi} = \frac{1}{2} (\widehat{\mathbf{K}}^T - \widehat{\mathbf{K}}), \quad (2.30)$$

и для эйлерова вектора линейного поворота

$$\varphi_i = \frac{1}{2} e_{ijk} \Psi_{kj}, \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{U}. \quad (2.31)$$

Относительное перемещение при этом способе описания движения для  $\varepsilon_{ij} = 0$  определяется следующим образом:

$$dU_i = e_{ijk} \varphi_j dx_k, \quad \text{или} \quad d\mathbf{U} = \boldsymbol{\varphi} \times d\mathbf{x}. \quad (2.32)$$

В общем случае малой деформации соотношения Коши связывают три компонента вектора перемещения  $u_k$  с шестью (вследствие симметрии) компонентами тензора деформации  $\varepsilon_{ij}$ . Следовательно, для определения компонентов вектора перемещения необходимо проинтегрировать шесть уравнений вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 2\varepsilon_{ij}, \quad (2.33)$$

заданные правые части которых непрерывны вместе с их частными производными первого и второго порядка по координатам. Поскольку число уравнений больше числа неизвестных  $u_i$ , то эта задача может иметь решение только при наложении некоторых условий на компоненты тензора деформации  $\varepsilon_{ij}$ . Существование зависимостей между компонентами  $\varepsilon_{ij}$  следует и из физических соображений: если тело разделить на отдельные элементы и каждый элемент деформировать произвольно, то из этих деформированных элементов не удастся вновь составить сплошное тело.

Рассмотрим односвязную область  $V$ , в которой деформации являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями координат. Обозначим через  $u_j^{(0)}(\mathbf{x}^{(0)})$  компоненты вектора перемещения, а через  $w_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}^{(0)})$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , — компоненты тензора линейного поворота в точке  $P_0(\mathbf{x}^{(0)})$

рассматриваемой области  $V$ . Предположим, что  $u_j^{(0)}$  и  $w_{ij}^{(0)}$  известны. Определим компоненты вектора перемещения  $u_j(\mathbf{x}^{(1)})$  в точке  $P_1(\mathbf{x}^{(1)})$ , также принадлежащей области  $V$ .

Выразим  $u_j(\mathbf{x}^{(1)})$  с помощью следующего интеграла:

$$u_j(\mathbf{x}^{(1)}) = u_j(\mathbf{x}^{(0)}) + \int_{P_0}^{P_1} du_j = u_j(\mathbf{x}^{(0)}) + \int_{P_0}^{P_1} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} dx_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Воспользовавшись соотношением (1.25), перепишем этот интеграл в виде

$$u_j(\mathbf{x}^{(1)}) = u_j(\mathbf{x}^{(0)}) + \int_{P_0}^{P_1} \varepsilon_{jk} dx_k + \int_{P_0}^{P_1} w_{jk} dx_k.$$

Интегрирование по частям последнего слагаемого дает

$$u_j(\mathbf{x}^{(1)}) = u_j(\mathbf{x}^{(0)}) + (x_k^{(1)} - x_k^{(0)})w_{jk}^{(0)} + \int_{P_0}^{P_1} \left[ \varepsilon_{jl} + (x_k^{(1)} - x_k) \frac{\partial w_{jk}}{\partial x_l} \right] dx_l, \\ l = 1, 2, 3.$$

Используя тождество  $\frac{\partial w_{jk}}{\partial x_l} = \frac{\partial \varepsilon_{lj}}{\partial x_k} - \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x_j}$ , получим

$$u_j(\mathbf{x}^{(1)}) = u_j(\mathbf{x}^{(0)}) + (x_k^{(1)} - x_k^{(0)})w_{jk}^{(0)} + \int_{P_0}^{P_1} U_{jr} dx_r,$$

где  $U_{jr} = \varepsilon_{jr} + (x_k^{(1)} - x_k)e_{jkl}e_{lsm} \frac{\partial \varepsilon_{rs}}{\partial x_m}$ ,  $j, k, l, m, r, s = 1, 2, 3$ .

Компоненты вектора перемещения  $u_j(\mathbf{x}^{(1)})$  будут определены однозначно, если интеграл в последнем уравнении не будет зависеть от пути интегрирования. Выберем в качестве пути интегрирования замкнутую кривую  $C$ , идущую из точки  $P_0$  к точке  $P_1$  и возвращающуюся из  $P_1$  в  $P_0$ . Если рассматриваемое тело односвязно, то кривую  $C$  можно рассматривать как границу поверхности  $S$ , расположенной внутри тела. Тогда, воспользовавшись теоремой Стокса, получим

$$\oint_C U_{jr} dx_r = \int_S e_{pnr} \frac{\partial U_{jr}}{\partial x_n} n_p dS.$$

Поскольку  $\oint_C U_{jr} dx_r = 0$  в соответствии с постулированной однозначностью  $u_j(\mathbf{x})$ , то из последней формулы следуют необходимые условия:

$$e_{pnr} \frac{\partial U_{jr}}{\partial x_n} = 0,$$

откуда с учетом введенного обозначения для  $U_{jr}$  получим

$$e_{pnr} \left[ \frac{\partial \varepsilon_{jr}}{\partial x_n} - e_{jnl} e_{lsm} \frac{\partial \varepsilon_{rs}}{\partial x_m} + e_{jkl} e_{lsm} (x_k^{(1)} - x_k) \frac{\partial^2 \varepsilon_{rs}}{\partial x_m \partial x_n} \right] = 0.$$

Если учесть равенство  $e_{jnl} e_{lsm} = \delta_{js} \delta_{mn} - \delta_{jm} \delta_{ns}$ , то

$$e_{pnr} \left[ \frac{\partial \varepsilon_{jr}}{\partial x_n} - \left( \frac{\partial \varepsilon_{rj}}{\partial x_n} - \frac{\partial \varepsilon_{rn}}{\partial x_j} \right) \right] + e_{jkl} (x_k^{(1)} - x_k) e_{pnr} e_{lsm} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rs}}{\partial x_m \partial x_n} = 0.$$

Первое слагаемое в последнем равенстве тождественно равно нулю. Достаточным условием равенства нулю второго слагаемого для любого значения  $(x_k^{(1)} - x_k)$  является

$$e_{pnr} e_{lsm} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rs}}{\partial x_m \partial x_n} = 0.$$

Полученные равенства запишем в ином виде:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{km}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_m} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jm}}{\partial x_i \partial x_k} = 0. \quad (2.34)$$

Эти условия обеспечиваются при существовании непрерывного вектора перемещения  $\mathbf{u}$  вместе с его частными производными по координатам по крайней мере до третьего порядка включительно, так что компоненты заданного тензора деформации обязательно должны быть связаны с компонентами вектора перемещения соотношениями (1.33).

В выражении (2.34) содержится восемьдесят одно уравнение, но только шесть из них различны. Это три уравнения вида

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad (2.35)$$

и три — вида

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0. \quad (2.36)$$

Остальные уравнения получаем циклической перестановкой индексов.

Условия совместности деформаций (2.34)–(2.36) часто называют условиями Сен-Венана.

Из выражений (2.22) и (2.23) для компонентов тензоров малой деформации в лагранжевом и эйлеровом представлениях очевидна симметрия этих тензоров (впрочем, это же утверждение относится к выражениям (2.20), (2.21) и др.). Тогда для каждого симметричного тензора второго ранга с компонентами  $\varepsilon_{ij}$  (или  $l_{ij}$ ), заданного в некоторой точке пространства, и для каждого направления в этой точке, заданного единичным вектором  $\mathbf{n}$  с компонентами  $n_j$ , существует вектор  $\mathbf{c}$  с компонентами  $c_i$ , определяемый равенством

$$c_i = \varepsilon_{ij} n_j, \quad \text{или} \quad \mathbf{c} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{n}. \quad (2.37)$$

Будем рассматривать тензор с компонентами  $\varepsilon_{ij}$  как линейный векторный оператор, который ставит в соответствие направлению  $\mathbf{n}$  вектор  $\mathbf{c}$ . Если



векторы  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{c}$  коллинеарны, то  $c_i = \lambda n_i$  и

$$\varepsilon_{ij} n_j = \lambda n_i, \quad \text{или} \quad \widehat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}. \quad (2.38)$$

В этом случае направление, задаваемое вектором  $\mathbf{n}$ , называется *главным направлением* (или главной осью) *тензора* с компонентами  $\varepsilon_{ij}$ . Если воспользоваться тождеством  $n_i = \delta_{ij} n_j$ , то

$$\left( \varepsilon_{ij} - \lambda \delta_{ij} \right) n_j = 0 \quad \text{и} \quad n_j n_j = 1. \quad (2.39)$$

Соотношения (2.39) образуют систему четырех алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными:  $\lambda$  и  $n_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Так как  $n_j$  произвольны, то необходимым и достаточным условием существования решения системы уравнений (2.39) относительно  $\lambda$  является равенство нулю определителя

$$\det \left( \varepsilon_{ij} - \lambda \delta_{ij} \right) = 0. \quad (2.40)$$

В развернутом виде условие (2.40) представляет собой кубическое уравнение

$$\lambda^3 - I_{1\varepsilon} \lambda^2 + I_{2\varepsilon} \lambda - I_{3\varepsilon} = 0 \quad (2.41)$$

относительно  $\lambda$ , которое называют *характеристическим уравнением тензора* с компонентами  $\varepsilon_{ij}$ . Его коэффициенты

$$I_{1\varepsilon} = \varepsilon_{ii}, \quad I_{2\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \right), \quad I_{3\varepsilon} = \det(\varepsilon_{ij}) \quad (2.42)$$

— *первый, второй и третий инварианты тензора деформации* с компонентами  $\varepsilon_{ij}$  соответственно.

Корни  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  кубического уравнения называют *главными значениями* (*главными деформациями*) *тензора деформации*  $\widehat{\mathbf{e}}$ . В общем случае  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  различны и для симметричного тензора с действительными компонентами являются действительными числами, что можно легко показать. Для этого умножим левую часть системы линейных алгебраических уравнений из (2.39) на  $n_i$  и с учетом  $n_i n_i = 1$  получим равенство  $n_i \varepsilon_{ij} n_j = \lambda$ . Так как левая часть этого равенства — действительное число, то действительно и  $\lambda$ . Каждому значению  $\lambda$  соответствует свой направляющий вектор  $\mathbf{n}$ , тройка этих направляющих векторов образует ортонормированный базис,  $n_i n_i = 1$ .

Тензор малой деформации с компонентами  $\varepsilon_{ij}$  можно разложить на сумму двух тензоров: *шарового тензора деформации* и *девиатора деформации*. Шаровой тензор деформации имеет компоненты  $\varepsilon_{kk} \delta_{ij} / 3$ , а девиатор деформации —  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{kk} \delta_{ij} / 3$ . Очевидно, что первый инвариант девиатора деформации равен нулю.

Главные значения девиатора деформации легко определить из решения характеристического уравнения, аналогичного уравнению (2.41):

$$e^3 + I_{2e} e - I_{3e} = 0,$$

где  $I_{2e} = I_{2\varepsilon} - I_{1\varepsilon}^2 / 3$ ,  $I_{3e} = \det(e_{ij})$ . Неотрицательную величину  $\Gamma = 2 \sqrt{|I_{2e}|}$  называют *интенсивностью деформации сдвига*.

**2.4. Геометрический смысл компонентов тензоров малой деформации.** При изучении малой деформации с использованием лагранжева способа описания движения сплошной среды лагранжевы тензор конечной деформации  $\hat{\mathbf{L}}$  в соотношениях (1.16) можно заменить тензором малой деформации  $\hat{\mathbf{I}}$ . Тогда

$$(dx)^2 - (da)^2 = (dx - da)(dx + da) = 2l_{ij}da_i da_j, \quad (2.43)$$

где  $dx$  и  $da$  — модули соответствующих векторов.

Для малой деформации  $dx \approx da$ , поэтому равенство (2.43) можно представить следующим образом:

$$e = \frac{dx - da}{da} = l_{ij} \frac{da_i}{da} \frac{da_j}{da} = l_{ij} \nu_i \nu_j, \quad \text{или} \quad e = \frac{dx - da}{da} = \mathbf{v}^T \cdot \hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{v}, \quad (2.44)$$

где  $\nu_i$  — компоненты единичного вектора  $\mathbf{v} = d\mathbf{a}/|d\mathbf{a}|$ .

Левая часть равенства (2.44) характеризует относительное изменение длины бесконечно малого элемента и называется *коэффициентом относительного удлинения* линейного элемента, первоначально имевшего направляющие косинусы  $\nu_i = da_i/da$ .

Применим формулу (2.44) к бесконечно малому линейному элементу  $P_0Q_0$  (рис. 2.4). Так как элемент расположен вдоль оси  $Oa_2$ , то  $da_1/da = 0$ ,  $da_3/da = 0$  и  $da_2/da = 1$ .

Поэтому

$$\frac{dx - da}{da} = l_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial a_2}. \quad (2.45)$$

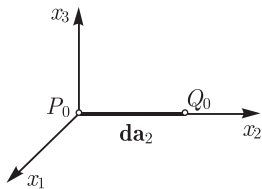


Рис. 2.4.

Итак, оказывается, что коэффициент относительного удлинения бесконечно малого линейного элемента, первоначально расположенного вдоль оси  $Oa_2$ , равен компоненту  $l_{22}$  тензора малой деформации. Очевидно, что для элементов

первоначально расположенных вдоль осей  $Oa_1$  и  $Oa_3$ , коэффициенты относительных удлинений равны  $l_{11}$  и  $l_{33}$  соответственно. Таким образом, диагональные элементы тензора малой деформации представляют собой коэффициенты относительного удлинения вдоль осей координат.

Если вычислить относительное изменение  $\Delta(dV_0)$  бесконечно малого объема  $dV_0$ , то

$$\varepsilon_0 = \frac{\Delta(dV_0)}{dV_0} = \frac{(1 + l_{11})da_1(1 + l_{22})da_2(1 + l_{33})da_3 - da_1da_2da_3}{da_1da_2da_3} \approx \approx l_{11} + l_{22} + l_{33}, \quad (2.46)$$

т. е. в линейном приближении  $\varepsilon_0 = I_{1\varepsilon}$ . Величину  $\varepsilon_0$  называют *коэффициентом кубического расширения*.

Для выяснения физического смысла недиагональных компонентов тензора  $l_{ij}$  рассмотрим два линейных бесконечно малых элемента  $P_0Q_0$  и  $P_0M_0$ , расположенных первоначально вдоль осей  $Oa_2$  и  $Oa_3$  выбранной

системы координат (рис. 2.5). После деформации эти элементы превращаются соответственно в элементы  $PQ$  и  $PM$  в системе координат с осями, параллельными исходным, и началом координат в точке  $P$ . Первоначально

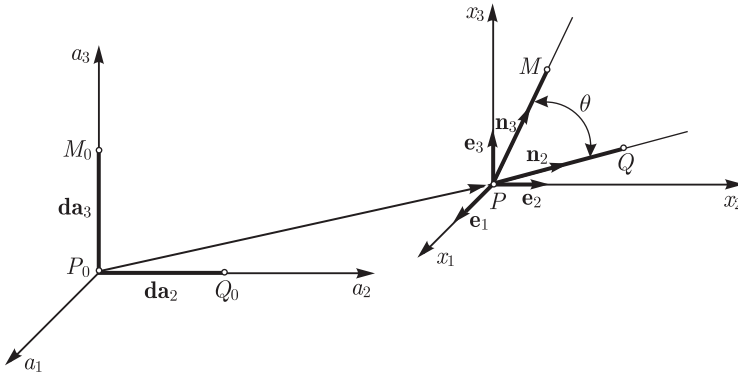


Рис. 2.5.

прямой угол между линейными элементами превращается в угол  $\theta$ . Так как  $du_i = (\partial u_i / \partial a_j) da_j$ , то при условии малости деформации единичный вектор, направленный из точки  $P$  в точку  $Q$ , равен

$$\mathbf{n}_2 = \frac{\partial u_1}{\partial a_2} \mathbf{e}_1 + \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial a_2}\right) \mathbf{e}_2 + \frac{\partial u_3}{\partial a_3} \mathbf{e}_3 \approx \frac{\partial u_1}{\partial a_2} \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \frac{\partial u_3}{\partial a_3} \mathbf{e}_3,$$

а единичный вектор, направленный из точки  $P$  в точку  $M$ , равен

$$\mathbf{n}_3 = \frac{\partial u_1}{\partial a_3} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial a_3} \mathbf{e}_2 + \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial a_3}\right) \mathbf{e}_3 \approx \frac{\partial u_1}{\partial a_3} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial a_3} \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

Поэтому

$$\cos \theta = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3 = \frac{\partial u_1}{\partial a_3} \frac{\partial u_1}{\partial a_2} + \frac{\partial u_2}{\partial a_3} + \frac{\partial u_3}{\partial a_2},$$

откуда, пренебрегая слагаемым более высокого порядка малости, получим

$$\cos \theta = \frac{\partial u_2}{\partial a_3} + \frac{\partial u_3}{\partial a_2} = 2l_{23}.$$

Если обозначить  $\gamma_{23} = \pi/2 - \theta$ , то в силу малости  $\gamma_{23}$

$$\gamma_{23} \approx \sin \gamma_{23} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta = 2l_{23}.$$

Таким образом, недиагональные компоненты тензора малой деформации представляют собой половины изменений углов между двумя первоначально ортогональными бесконечно малыми линейными элементами. Недиagonальные компоненты тензора деформации называют *деформациями сдвига* (сдвиговыми деформациями).

Естественно, что аналогичные рассуждения могут быть проведены для эйлерова тензора малой деформации  $\mathbf{\epsilon}$ .

Перепишем соотношение (2.44) в виде

$$e = l_{ij}\nu_i\nu_j. \quad (2.47)$$

Шесть величин компонентов тензора деформации  $l_{ij}$  в окрестности рассматриваемой точки  $P_0$  являются функциями координат  $a_i$ . Пользуясь соотношением (2.47), рассмотрим его геометрическую интерпретацию. Будем откладывать из точки  $P_0$  (начала координат) по направлению каждого линейного элемента  $P_0Q_0$  отрезок  $r$ , квадрат длины которого обратно пропорционален величине  $e$ , т. е.

$$r^2 e = h^2,$$

где  $h$  — константа. Координатами конца этого отрезка будут

$$a_i = \nu_i r.$$

Тогда соотношение (2.47) с учетом двух последних равенств примет следующий вид:

$$l_{ij}a_i a_j = h^2 \text{sign}(e), \quad (2.48)$$

$\text{sign}(e) = 1$ , если  $e > 0$ ;  $\text{sign}(e) = -1$ , если  $e < 0$ , и  $\text{sign}(e) = 0$ , если  $e = 0$ .

Выражение (2.48) является уравнением центральной поверхности второго порядка, которую называют *поверхностью деформации*. Если  $D = I_{3\epsilon} h^2 \text{sign}(e) \neq 0$ , то при  $D > 0$ ,  $I_{1\epsilon} I_{3\epsilon} > 0$  и  $I_{2\epsilon} > 0$  эта поверхность представляет собой эллипсоид. В этом случае любой произвольный элементарный отрезок  $P_0Q_0$  испытывает растяжение. При  $D > 0$ ,  $I_{1\epsilon} I_{3\epsilon} \leq 0$  и (или)  $I_{2\epsilon} \leq 0$  рассматриваемая поверхность представляет собой двуполостный гиперboloид. В этом случае одни элементы  $P_0Q_0$  растянуты, а другие, соответствующие сопряженному гиперboloиду, будут сжатыми. Если  $D = 0$ ,  $I_{1\epsilon} I_{3\epsilon} \leq 0$  и (или)  $I_{2\epsilon} \leq 0$ , то мы имеем дело с конусом. При этом конус соответствует тем элементарным линейным элементам  $P_0Q_0$ , для которых относительное удлинение равно нулю, т. е. они сохраняют свою первоначальную длину.

Поскольку невырожденную ( $I_{3\epsilon} \neq 0$ ,  $I_{2\epsilon} \neq 0$ ) центральную поверхность второго порядка всегда можно привести к главным осям, направления которых определяются из условий

$$(l_{ij} - \lambda \delta_{ij})n_j = 0 \quad \text{и} \quad n_j n_j = 1,$$

то очевидно совпадение задач поиска главных значений и главных осей тензора малой деформации и главных осей поверхности, задаваемой уравнением (2.48). При этом главные значения тензора малой деформации являются коэффициентами относительного удлинения элементарных отрезков, расположенных на главных осях поверхности (2.48). Проведенные рассуждения правомерны и для эйлерова тензора малой деформации.

**2.5. Кинематические характеристики сплошной среды.** Скорость изменения во времени любого свойства сплошной среды в материальных точках этой среды называют *полной (субстанциональной, материальной) производной* величины, характеризующей рассматриваемое свойство. Мгновенное положение частицы, определяемое координатами  $x_i$ , само является свойством этой частицы. Полная производная по времени от положения частицы называется *мгновенной скоростью* частицы, т. е.

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i, \quad \text{или} \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}. \quad (2.49)$$

Если любое скалярное, векторное или тензорное свойство сплошной среды описывается функцией координат и времени, и если в лагранжевом представлении  $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{a}, t)$ , то полная производная по времени от этой величины имеет вид

$$\frac{d\hat{\mathbf{R}}}{dt} = \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{a}, t)}{\partial t}. \quad (2.50)$$

Если же это свойство сплошной среды есть функция эйлеровых координат,  $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, t)$ , то вычисление полной производной проводится по формуле

$$\frac{d\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + v_k \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k}, \quad \text{или} \quad \frac{d\hat{\mathbf{R}}}{dt} = \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\hat{\mathbf{R}}\nabla_{\mathbf{x}}), \quad (2.51)$$

где  $\hat{\mathbf{R}}\nabla_{\mathbf{x}} = \frac{\partial R_{ij\dots}}{\partial x_k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_k$  — внешнее произведение тензора  $\hat{\mathbf{R}} = R_{ij\dots} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \dots$  и дифференциального оператора (вектора)  $\nabla_{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{e}_k$ , представляющее собой тензор, ранг которого на единицу выше ранга тензора  $\hat{\mathbf{R}}$ . Второе слагаемое в правой части равенства (2.51) является следствием того, что частицы изменяют свое положение в пространстве. Первое слагаемое характеризует скорость изменения рассматриваемого свойства в фиксированной точке пространства и называется *локальной скоростью изменения  $\hat{\mathbf{R}}$* , а второе — *конвективной*. Другое определение вектора скорости можно получить, используя соотношение (2.3):

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{d(u_i + a_i)}{dt} = \frac{du_i}{dt}, \quad \text{или} \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d(\mathbf{u} + \mathbf{a})}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \quad (2.52)$$

так как  $\mathbf{a}$  не зависит от времени. Если вектор перемещения  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{a}, t)$ , то

$$v_i = \dot{u}_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad \text{или} \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}. \quad (2.53)$$

Если же вектор перемещения есть функция эйлеровых координат, т. е.  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ , то

$$v_i(\mathbf{x}, t) = \dot{U}_i(\mathbf{x}, t) = \frac{dU_i(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial U_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + v_k(\mathbf{x}, t) \frac{\partial U_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k},$$

или

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{U} \nabla_{\mathbf{x}}), \quad (2.54)$$

где  $\mathbf{U} \nabla_{\mathbf{x}} = \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k$ .

В формулах (2.54) скорость задана в неявном виде, так как она входит множителем во второе слагаемое в правой части. Функция

$$v_i = v_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad \text{или} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad (2.55)$$

задает *поле скоростей*. Полную производную по времени от вектора скорости называют *ускорением*.

В процессе движения или течения частица следует по линии, которую называют *траекторией*. *Линией тока* для поля скоростей в некоторый момент времени называют кривую, касательная к которой в любой точке совпадает по направлению с вектором скорости в этой точке. Из этого определения следует, что

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \text{или} \quad \frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3}, \quad (2.56)$$

где  $d\mathbf{x}$  — бесконечно малый вектор касательной к линии тока. Движение сплошной среды называют *установившимся (стационарным)*, если поле скоростей не зависит от времени, так что  $\partial v_i / \partial t = 0$ . Для установившегося движения линии тока и траектории совпадают.

Вычислив пространственный градиент мгновенного поля скоростей, получим *тензор градиента скорости* с компонентами  $Y_{ij} = \partial v_i / \partial x_j$ . Этот тензор можно представить в виде суммы двух тензоров — симметричного и антисимметричного:

$$Y_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = V_{ij} + W_{ij},$$

или

$$\widehat{\mathbf{Y}}^T = \frac{1}{2} \left( \widehat{\mathbf{Y}}^T + \widehat{\mathbf{Y}} \right) + \frac{1}{2} \left( \widehat{\mathbf{Y}}^T - \widehat{\mathbf{Y}} \right). \quad (2.57)$$

Симметричный тензор с компонентами

$$V_{ij} = V_{ji} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad \text{или} \quad \widehat{\mathbf{V}} = \frac{1}{2} \left( \widehat{\mathbf{Y}}^T + \widehat{\mathbf{Y}} \right), \quad (2.58)$$

называют *тензором скоростей*. Антисимметричный тензор с компонентами

$$W_{ij} = -W_{ji} = \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad \text{или} \quad \widehat{\mathbf{W}} = \frac{1}{2} \left( \widehat{\mathbf{Y}}^T - \widehat{\mathbf{Y}} \right), \quad (2.59)$$

называют *тензором завихренности* или *вихря*.

Если тензор скоростей в окрестности произвольной точки  $P$  тождественно равен нулю, то

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j = W_{ij} dx_j, \quad \text{или} \quad d\mathbf{v} = \widehat{\mathbf{W}} \cdot d\mathbf{x}, \quad (2.60)$$

и движение в окрестности этой точки будет *вращением абсолютно твердого тела*. Поэтому поле скоростей называют *безвихревым*, если тензор завихренности равен нулю во всех его точках.

Поскольку тензор скоростей симметричен, то для него существуют такие понятия, как главные оси, главные значения, инварианты и т. д. Кроме того, для компонентов тензора скоростей можно записать условия совместности, аналогичные условиям совместности деформаций.

Введенный в рассмотрение тензор скоростей дает возможность получить еще одну характеристику сплошной среды — тензор бесконечно малой деформации. Так как вектор скорости  $\mathbf{v}$  в эйлеровых координатах имеет компоненты  $v_k = dx_k/dt$ ,  $k = 1, 2, 3$ , то компоненты вектора перемещения за время  $\Delta t$  при переходе от одной актуальной (в момент времени  $t$ ) конфигурации сплошной среды к последующей (в момент времени  $t + \Delta t$ ) будут  $U_k \approx v_k \Delta t$ .

Подставив выражение для  $U_k$  в (2.21), получим следующее выражение для компонентов тензора конечной деформации Альманзи:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \Delta t \right) \Delta t, \quad i, j, k = 1, 2, 3,$$

или

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \left( \hat{\mathbf{Y}}^T + \hat{\mathbf{Y}} - \hat{\mathbf{Y}}^T \cdot \hat{\mathbf{Y}} \Delta t \right) \Delta t. \quad (2.61)$$

Устремив далее  $\Delta t \rightarrow 0$ , вместо соотношений (1.61) получим следующие:

$$E_{ij}^* = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dt = V_{ij} dt, \quad \text{или}$$

$$\hat{\mathbf{E}}^* = \frac{1}{2} \left( \hat{\mathbf{Y}}^T + \hat{\mathbf{Y}} \right) dt = \hat{\mathbf{V}} dt, \quad (2.62)$$

где  $E_{ij}^*$  — компоненты *тензора бесконечно малой деформации*  $\hat{\mathbf{E}}^*$ . Квадратичные слагаемые в (2.61) отброшены в силу их малости при  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Вычислим полные производные по времени от лагранжиана (1.17) и эйлера (1.19) тензоров конечной деформации:

$$\begin{aligned} \frac{dL_{ij}}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial x_k}{\partial a_j} - \delta_{ij} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_k}{\partial a_i} \right) \frac{\partial x_k}{\partial a_j} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_k}{\partial a_j} \right) \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_k}{\partial a_j} \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial a_i} + \frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial a_j} \right) = \\ &= \frac{\partial x_k}{\partial a_j} \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial a_i} = F_{kj} Y_{km} F_{mi}, \quad i, j, k, m = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

или

$$\frac{d\hat{\mathbf{L}}}{dt} = \hat{\mathbf{F}}^T \cdot \hat{\mathbf{Y}} \cdot \hat{\mathbf{F}}, \quad (2.63)$$

Для вычисления  $dE_{ij}/dt$  воспользуемся соотношением (1.11):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial a_k} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial a_k} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} + \frac{\partial x_i}{\partial a_k} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial x_i}{\partial a_k} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \right) = 0,$$

откуда

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial a_k}{\partial x_i}.$$

Далее

$$\begin{aligned} \frac{dE_{ij}}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \delta_{ij} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial a_k}{\partial x_j} + \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \frac{\partial a_k}{\partial x_m} + \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_m}{\partial x_j} \frac{\partial a_k}{\partial x_m} \right) = H_{kj} Y_{mi} H_{km}, \end{aligned}$$

или

$$\frac{d\hat{\mathbf{E}}}{dt} = \hat{\mathbf{H}}^T \cdot \hat{\mathbf{Y}} \cdot \hat{\mathbf{H}}. \quad (2.64)$$

Вычисленные полные производные по времени (2.63) и (2.64) от тензоров конечной деформации называют *лагранжевым* и *эйлеровым тензорами скоростей деформации* соответственно. Путем непосредственного вычисления компонентов тензоров  $d\hat{\mathbf{E}}/dt$  и  $d\hat{\mathbf{L}}/dt$  нетрудно убедиться в том, что эти тензоры симметричны. Если положить деформации малыми, т. е.  $H_{ij} = \delta_{ij}$ , то

$$\frac{dE_{ij}}{dt} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.65)$$

и компоненты эйлерова тензора скоростей деформации совпадут с компонентами тензора скоростей.

Из соотношений (2.63) и (2.64) можно получить выражение тензора градиента скорости через тензоры скоростей деформации:

$$Y_{km} = \frac{\partial v_k}{\partial x_m} = \frac{\partial a_j}{\partial x_k} \frac{dL_{ij}}{dt} \frac{\partial a_i}{\partial x_m} = H_{jk} \frac{dL_{ij}}{dt} H_{im}, \quad \text{или} \quad \hat{\mathbf{Y}} = \hat{\mathbf{H}}^T \cdot \frac{d\hat{\mathbf{L}}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{H}}, \quad (2.66)$$

$$Y_{mi} = \frac{\partial x_j}{\partial a_k} \frac{dE_{ij}}{dt} \frac{\partial x_m}{\partial a_k} = F_{jk} \frac{dE_{ij}}{dt} F_{mk}, \quad \text{или} \quad \hat{\mathbf{Y}}^T = \hat{\mathbf{F}}^T \cdot \frac{d\hat{\mathbf{E}}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{F}}. \quad (2.67)$$

Отметим, что вычисление компонентов тензора  $\hat{\mathbf{Y}}$  по формулам (2.66) и (2.67) достаточно сложно, так как при изучении движения сплошной среды определяются компоненты вектора скорости, но не компоненты тензоров скоростей деформации.

**2.6. Массовые, объемные и поверхностные силы.** Рассмотрим два различных типа сил, действующих на тело, занимающее произвольный объем  $V$  сплошной среды и ограниченное поверхностью  $S$  в актуальной конфигурации.



Пусть  $dV$  — элемент объема тела, а  $dm$  — его масса. Если на частицы массой  $dm$  действует элементарная сила  $d\mathbf{F}$ , то

$$b_i = \frac{dF_i}{dm}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{или} \quad \mathbf{b} = \frac{d\mathbf{F}}{dm}, \quad (2.68)$$

есть *интенсивность массовых сил*. Если же положить, что та же элементарная сила  $d\mathbf{F}$  действует на объем  $dV$ , то

$$f_i = \frac{dF_i}{dV}, \quad \text{или} \quad \mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dV} \quad (2.69)$$

есть *интенсивность объемных сил*.

Интенсивности массовых и объемных сил связаны между собой следующим образом. Пусть  $\rho = dm/dV$  — *плотность массы (плотность)*. Тогда из соотношений (2.68) и (2.69) следует, что

$$\rho b_i = f_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{или} \quad \rho \mathbf{b} = \mathbf{f}. \quad (2.70)$$

Сосредоточенные внешние силы, приложенные в отдельных точках тела, можно рассматривать как предельный случай массовых сил, действующих в окрестности рассматриваемой точки.

Если на элемент  $dS$  поверхности, ограничивающей рассматриваемое тело, действует сила  $d\mathbf{P}$ , то

$$\sigma_i^{(\mathbf{n})} = \frac{dP_i}{dS}, \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\sigma}^{(\mathbf{n})} = \frac{d\mathbf{P}}{dS}, \quad (2.71)$$

называют *вектором напряжения*. Верхний индекс  $\mathbf{n}$  у вектора напряжения означает, что положение в пространстве элемента  $dS$  граничной поверхности задано единичным вектором внешней нормали  $\mathbf{n}$  в окрестности произвольной точки, принадлежащей  $dS$ .

Пусть рассматриваемое нами тело находится в равновесии под действием заданной системы сил  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_l$ . Рассечем его произвольной поверхностью, проходящей через заданную точку  $O$ , на две части  $A$  и  $B$ . Далее отбросим часть тела  $B$ . При этом к каждому элементу  $dS$  поверхности раздела мы должны приложить силу  $\boldsymbol{\sigma}^{(\mathbf{n})} dS$ , причем величина и направление  $\boldsymbol{\sigma}^{(\mathbf{n})}$  должны быть такими, чтобы оставшаяся часть тела  $A$  находилась в состоянии равновесия. Очевидно, что вектор напряжения существенным образом зависит от того, каким образом через заданную точку  $O$  проведена секущая поверхность, т. е. от направления  $\mathbf{n}$  единичного вектора внешней нормали к секущей поверхности в заданной точке  $O$ . Совокупность пар векторов  $\boldsymbol{\sigma}^{(\mathbf{n})}$  и  $\mathbf{n}$ , или  $\sigma_i^{(\mathbf{n})}$  и  $n_i$ , определяет *напряженное состояние* в окрестности заданной точки  $O$ .

**2.7. Тензоры напряжений при различных способах описания движения сплошной среды.** Для того, чтобы полностью описать напряженное состояние в окрестности рассматриваемой точки, нет необходимости рассматривать все возможные пары  $\boldsymbol{\sigma}^{(\mathbf{n})}$  и  $\mathbf{n}$ . Можно доказать, что для этого достаточно задать векторы напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадках, содержащих рассматриваемую точку.

Пусть  $\boldsymbol{\sigma}^{(n_1)}$  — вектор напряжения, действующий на площадке с единичной нормалью  $\mathbf{n}_1$ . Тогда

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n_1)} = \sigma_1^{(n_1)} \mathbf{n}_1 + \sigma_2^{(n_1)} \mathbf{n}_2 + \sigma_3^{(n_1)} \mathbf{n}_3,$$

где  $\sigma_j^{(n_1)}$ ,  $j = 1, 2, 3$  — проекции вектора  $\boldsymbol{\sigma}^{(n_1)}$  на направления трех взаимно перпендикулярных нормалей  $\mathbf{n}_j$ , задающих элементарные площадки, содержащие рассматриваемую точку  $O$ . Очевидно, что векторы  $\boldsymbol{\sigma}^{(n_2)}$  и  $\boldsymbol{\sigma}^{(n_3)}$  могут быть представлены аналогично. Тогда окончательно получим

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n_i)} = \sigma_j^{(n_i)} \mathbf{n}_j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.72)$$

Девять компонентов  $\sigma_j^{(n_i)}$  образуют в системе прямоугольных декартовых координат при Эйлеровом способе описания движения сплошной среды симметричный (как будет показано ниже) тензор напряжений с компонентами

$$\sigma_{ji} = \sigma_j^{(n_i)},$$

который называют *тензором напряжений Коши*  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ . Этот тензор задает пространственную меру напряженного состояния в точке и зависит от пространственных переменных  $x_1, x_2, x_3$  и времени  $t$ . Компоненты  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ , соответствующие перпендикулярным к указанным площадкам силам, называют *нормальными напряжениями*. Компоненты  $\sigma_{ij}$  ( $i \neq j$ ), соответствующие силам, действующим в плоскостях рассматриваемых элементарных площадок, называют *касательными напряжениями*. Нормальные напряжения положительны, если на площадке, внешняя нормаль которой совпадает с направлением одной из осей координат, сила действует вдоль положительного направления этой оси.

Окончательно связь между вектором напряжения  $\boldsymbol{\sigma}^{(n)}$  на произвольно ориентированной площадке, содержащей рассматриваемую точку, и тензором напряжений Коши  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  в этой же точке имеет следующий вид:

$$\sigma_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j, \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\sigma}^{(n)} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}. \quad (2.73)$$

Если рассмотреть элемент поверхности  $dS_0$  с единичной нормалью  $\mathbf{N}$  в исходной конфигурации, на который действует сила  $d\mathbf{P}$ , то

$$T_i^{(N)} = \frac{dP_i}{dS_0}, \quad \text{или} \quad \mathbf{T}^{(N)} = \frac{d\mathbf{P}}{dS_0}, \quad (2.74)$$

есть вектор напряжения относительно этой конфигурации. Аналогично (2.72) можем записать

$$\mathbf{T}^{(N_i)} = T_j^{(N_i)} \mathbf{N}_j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.75)$$

где  $\mathbf{N}_j$  — единичные векторы внешних нормалей к трем взаимно перпендикулярным площадкам, содержащим рассматриваемую точку.

Девять компонентов трех векторов  $\mathbf{T}^{(N_i)}$  образуют *первый тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа*  $\hat{\mathbf{T}}$  с компонентами  $T_{ji} = T_j^{(N_i)}$ , являющийся

материальной мерой напряженного состояния в точке и зависящий от материальных координат  $a_1, a_2, a_3$  и времени  $t$ .

Связь между вектором напряжения  $\mathbf{T}^{(N)}$  на произвольно ориентированной площадке относительно начальной конфигурации, содержащей рассматриваемую точку, и первым тензором напряжений Пиолы–Кирхгофа  $\hat{\mathbf{T}}$  в этой же точке имеет вид

$$T_j^{(N)} = T_{ji} N_j, \quad \text{или} \quad \mathbf{T}^{(N)} = \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{N}. \quad (2.76)$$

Установить соотношения, связывающие между собой тензоры  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  и  $\hat{\mathbf{T}}$ , можно следующим образом. Из равенств (2.72), (2.74), (2.73) и (2.76) имеем

$$d\mathbf{P} = \boldsymbol{\sigma}^{(n)} dS = \mathbf{T}^{(N)} dS_0 = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} dS = \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{N} dS_0 = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{S}_0. \quad (2.77)$$

Для вычисления  $d\mathbf{S}_0$  в исходной конфигурации рассмотрим два неколлинеарных вектора  $d\mathbf{b}_0$  и  $db'_0$  таких, что в рассматриваемой точке их векторное произведение

$$d\mathbf{S}_0 = d\mathbf{b}_0 \times db'_0 \quad \text{или} \quad dS_{0i} = e_{ijk} db_{0j} db'_{0k},$$

где вектор  $d\mathbf{S}_0$  с единичным вектором  $\mathbf{N}$  направлен по нормали к плоскости векторов  $d\mathbf{b}_0$  и  $db'_0$ . Его величина равна элементарной площади  $dS_0$  параллелограмма со сторонами  $|d\mathbf{b}_0|$  и  $|db'_0|$ , т. е.  $d\mathbf{S}_0 = \mathbf{N} dS_0$ , или  $dS_{0i} = N_i dS_0$ . Векторам  $d\mathbf{b}_0$  и  $db'_0$  соответствуют векторы  $d\mathbf{b}$  и  $db'$  в актуальной конфигурации, а  $d\mathbf{S} = d\mathbf{b} \times db'$ , или  $dS_p = e_{pqr} db_q db'_r$ . Тогда  $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ , или  $dS_p = n_p dS$ . Поскольку

$$db_q = \frac{\partial x_q}{\partial a_j} db_{0j}, \quad db'_r = \frac{\partial x_r}{\partial a_k} db'_{0k}, \quad \text{или} \quad d\mathbf{b} = \hat{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{b}_0, \quad db' = \hat{\mathbf{F}} \cdot db'_0,$$

то

$$dS_p = e_{pqr} \frac{\partial x_q}{\partial a_j} \frac{\partial x_r}{\partial a_k} db_{0j} db'_{0k}. \quad (2.78)$$

Непосредственным вычислением несложно установить, что  $e_{ijk} J = e_{pqr} \frac{\partial x_p}{\partial a_i} \frac{\partial x_q}{\partial a_j} \frac{\partial x_r}{\partial a_k}$ . Умножив левую и правую части равенства (2.78) на  $\partial x_p / \partial a_i$ , получим

$$\frac{\partial x_p}{\partial a_i} dS_p = e_{pqr} \frac{\partial x_p}{\partial a_i} \frac{\partial x_q}{\partial a_j} \frac{\partial x_r}{\partial a_k} db_{0j} db'_{0k} = e_{ijk} J db_{0j} db'_{0k}.$$

Окончательно,

$$\begin{aligned} dS_{0i} &= J^{-1} \frac{\partial x_p}{\partial a_i} dS_p, \quad \text{или} \quad d\mathbf{S}_0 = J^{-1} \hat{\mathbf{F}}^T \cdot d\mathbf{S}, \\ dS_p &= J \frac{\partial a_i}{\partial x_p} dS_{0i}, \quad \text{или} \quad d\mathbf{S} = J \hat{\mathbf{H}}^T \cdot d\mathbf{S}_0. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Подставляя соотношения (2.79) в последнее равенство из (2.77), получаем

$$\begin{aligned}\sigma_{ji} &= J^{-1} T_{jp} \frac{\partial x_i}{\partial a_p}, \quad \text{или} \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = J^{-1} \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{F}}^T, \\ T_{ij} &= J \sigma_{jp} \frac{\partial a_i}{\partial x_p}, \quad \text{или} \quad \hat{\mathbf{T}} = J \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{H}}^T.\end{aligned}\quad (2.80)$$

Отметим, что тензор  $\hat{\mathbf{T}}$  с компонентами  $T_{ij}$  не является истинным тензором, так как его индексы принадлежат разным системам координат: индекс  $i$  принадлежит системе эйлеровых координат, а индекс  $j$  — лагранжевых. Если тензор напряжений Коши  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  симметричен, то в силу соотношений (2.80) очевидна несимметричность тензора  $\hat{\mathbf{T}}$ , поскольку несимметричен тензор  $\hat{\mathbf{F}}$ .

В качестве материальной меры напряженного состояния используют тензор с компонентами

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{ij} &= \frac{\partial a_j}{\partial x_k} T_{ik}, \quad \text{или} \quad \hat{\tilde{\mathbf{T}}} = \hat{\mathbf{H}} \cdot \hat{\mathbf{T}}, \\ \tilde{T}_{ij} &= J \frac{\partial a_i}{\partial x_m} \frac{\partial a_j}{\partial x_k} \sigma_{km}, \quad \text{или} \quad \hat{\tilde{\mathbf{T}}} = J \hat{\mathbf{H}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{H}}^T, \\ \sigma_{ij} &= J^{-1} \frac{\partial x_i}{\partial a_m} \frac{\partial x_j}{\partial a_k} \tilde{T}_{km}, \quad \text{или} \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = J^{-1} \hat{\mathbf{F}} \cdot \hat{\tilde{\mathbf{T}}} \cdot \hat{\mathbf{F}}^T.\end{aligned}\quad (2.81)$$

Непосредственной проверкой можно установить, что *второй тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа*  $\hat{\tilde{\mathbf{T}}}$  симметричен и представляет собой истинный тензор, так как оба его индекса принадлежат лагранжевой системе координат.

**2.8. Тензоры напряжений при малых деформациях.** Если при изучении напряженного состояния в окрестности произвольной точки сплошной среды пространственный и материальный градиенты деформации удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_j} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial a_k}{\partial x_m} = \delta_{km},$$

то в этом случае из выражений (2.80) и (2.81) следует, что

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= T_{ij}, \quad \text{или} \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{T}}, \\ \sigma_{ij} &= \tilde{T}_{ij}, \quad \text{или} \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\tilde{\mathbf{T}}}.\end{aligned}\quad (2.82)$$

В любой произвольной точке рассматриваемого объема сплошной среды выражения (2.73) и (2.76) совпадают, и в дальнейшем мы воспользуемся первым из них.

Тензор напряжений с компонентами  $\sigma_{ij}$  ставит в соответствие каждому направлению  $n_j$  вектор напряжения с компонентами  $\sigma_i^{(n)}$ . Направления, для

которых  $\sigma_i^{(\mathbf{n})}$  и  $n_j$  коллинеарны, называют *главными направлениями* (*главными осями*) *тензора напряжений*. Для главного направления выполняется равенство

$$\sigma_i^{(\mathbf{n})} = \sigma n_i, \quad \text{или} \quad \mathfrak{G}^{(\mathbf{n})} = \sigma \mathbf{n}, \quad (2.83)$$

где  $\sigma$  — величина вектора напряжения, которую называют *главным напряжением*. Используя очевидные равенства  $n_i = \delta_{ij}n_j$ , из (2.73) и (2.83) получим

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij})n_j = 0. \quad (2.84)$$

Уравнения (2.84) содержат три неизвестных компонента единичного вектора  $\mathbf{n}$ , удовлетворяющих условию  $n_i n_i = 1$ , и величину главного напряжения  $\sigma$ . Очевидно, что тривиальное решение системы уравнений (2.84) относительно  $n_j$  есть  $n_j = 0$ . Для существования нетривиального решения системы линейных уравнений (2.84) необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы был равен нулю, т. е.

$$\det(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) = 0. \quad (2.85)$$

После его раскрытия получаем кубическое уравнение относительно  $\sigma$ , которое называют *характеристическим уравнением*:

$$\sigma^3 - I_{1\sigma}\sigma^2 + I_{2\sigma}\sigma - I_{3\sigma} = 0. \quad (2.86)$$

Коэффициенты в уравнении (2.86) называют, соответственно, *первым*, *вторым* и *третьим инвариантами тензора напряжений*,

$$I_{1\sigma} = \sigma_{ii}, \quad I_{2\sigma} = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}), \quad I_{3\sigma} = \det(\sigma_{ij}). \quad (2.87)$$

Три корня  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  уравнения (2.86) являются значениями трех главных напряжений, они всегда действительны для симметричного тензора  $\mathfrak{G}$  с действительными компонентами  $\sigma_{ij}$  (это можно показать аналогично проделанному в п. 2.3). Каждому из них соответствует своя главная ось с направляющими косинусами, которые определяются из решения системы уравнений (2.84) для  $\sigma = \sigma_1$  ( $\sigma = \sigma_2$ ,  $\sigma = \sigma_3$ ) при условии  $n_i n_i = 1$ . Главные напряжения полагают упорядоченными, т. е.  $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$ .

Тензор напряжений, компонентами которого являются  $\sigma_{ij}$ , можно, как и любой симметричный тензор второго ранга, разложить на *шаровой тензор напряжений* и *девиатор напряжений*. Первый из них имеет вид

$$\sigma_0 \delta_{ij} = \sigma_{kk} \delta_{ij} / 3, \quad \text{или} \quad \widehat{\mathfrak{G}}_0 = \widehat{\mathbf{I}} \sigma_{kk} / 3, \quad (2.88)$$

а второй —

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}, \quad \text{или} \quad \widehat{\mathfrak{s}} = \widehat{\mathfrak{G}} - \widehat{\mathfrak{G}}_0. \quad (2.89)$$

Из последних двух равенств (2.88) и (2.89) очевидно, что первый инвариант девиатора напряжений равен нулю, т. е.  $s_{kk} = 0$ . Главные значения девиатора напряжений могут быть определены из решения характеристического уравнения, аналогичного уравнению (2.86):

$$s^3 + I_{2s}s - I_{3s} = 0,$$

где  $I_{2s} = I_{2\sigma} - I_{1\sigma}^2 / 3$ ,  $I_{3s} = \det(s_{ij})$  — инварианты девиатора напряжений.

Второй инвариант девиатора напряжений играет важную роль при построении различных вариантов теорий, описывающих нелинейное деформирование твердых тел. Наглядное истолкование этой величины можно получить следующим образом. Вычислим вектор напряжения на элементарной площадке, равнонаклоненной ко всем трем главным осям тензора напряжений. Эту площадку называют *октаэдрической* ( $n_1 = n_2 = n_3 = 1/\sqrt{3}$ ), а действующие на ней две составляющие вектора напряжения — в плоскости площадки и по нормали к ней — *октаэдрическими напряжениями*. Очевидно, что квадрат модуля вектора напряжения на рассматриваемой площадке будет равен

$$\sigma_i^{(n)} \sigma_i^{(n)} = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)/3,$$

а проекция вектора напряжения на нормаль —  $\sigma_n = \sigma_i^{(n)} n_i = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ . Тогда легко определить *касательное октаэдрическое напряжение*:

$$\tau = \sqrt{\sigma_i^{(n)} \sigma_i^{(n)} - \sigma_n^2} = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}/3.$$

Непосредственным вычислением через главные значения тензора напряжений можно показать, что

$$\tau = \sqrt{2|I_{2s}|/3}.$$

Отметим также, что слагаемые под корнем в выражении для  $\tau$  с точностью до множителя 0,25 являются квадратами экстремальных ненулевых значений касательных напряжений на площадках, равнонаклоненных попарно относительно двух любых главных осей тензора напряжений и проходящих через третью ось.

Проекция вектора напряжения  $\sigma^{(n)}$  на произвольной элементарной площадке с единичной нормалью  $\mathbf{n}$  на эту нормаль будет равна

$$\sigma_n = \sigma_{ij} n_j n_i. \quad (2.90)$$

Очевидно, что формула (2.90) с точностью до обозначений совпадает с (2.48), и геометрическая интерпретация выражения (2.90) может быть проведена аналогично проделанной относительно тензора малой деформации. В данном случае уравнение центральной поверхности второго порядка называется *поверхностью напряжений Коши* и имеет вид

$$\sigma_{ij} x_j x_i = h^2 \text{sign}(\sigma_n),$$

где  $h$  — константа.

Если эта поверхность невырождена ( $I_{3\sigma} \neq 0$ ,  $I_{2\sigma} \neq 0$ ), то ее всегда можно привести к главным осям. Нормальные напряжения, соответствующие элементарным площадкам, перпендикулярным главным осям, являются главными напряжениями. Естественно, они совпадают с вычисленными ранее по формуле (2.86).

### 3. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ НЕОБРАТИМЫХ ПРОЦЕССОВ

**3.1. Основные понятия термодинамики необратимых процессов.** *Термодинамика* в современном представлении — феноменологическая теория общих закономерностей процессов, протекающих в макроскопических телах и связанных с взаимным превращением механической энергии, теплоты и других форм движения.

При исследовании поведения сплошной среды любое тело, занимающее в актуальной конфигурации объем  $V$  и ограниченное поверхностью  $S$ , а также любую его часть (конечную или бесконечно малую), будем рассматривать как *термодинамическую систему*. Систему, которая обменивается массой и энергией с окружающей средой, называют *открытой термодинамической системой*. Если существует только обмен энергией с окружающей средой, то систему называют *закрытой*. В том случае, когда одновременно отсутствуют и обмен массой, и обмен энергией, систему называют *изолированной*.

Состояние термодинамической системы в окрестности произвольной точки в любой момент времени характеризуют *параметрами* термодинамического *состояния*, которые могут изменяться при взаимодействии системы с окружающей средой. Если при постоянных внешних воздействиях параметров термодинамического состояния не изменяются в течение рассматриваемого промежутка времени, то система находится в состоянии *термодинамического равновесия*. Состояние равновесия называют *устойчивым*, если при прекращении любых малых внешних воздействий система возвращается к исходному состоянию. В противном случае состояние равновесия называют *неустойчивым*.

При взаимодействии с окружающей средой термодинамическая система проходит ряд последовательных состояний, совокупность которых называют *термодинамическим процессом*. Будем называть термодинамический процесс *равновесным*, если в любом промежуточном состоянии при фиксированных внешних воздействиях для конечного интервала времени параметры термодинамического состояния системы не изменяются. В противном случае термодинамический процесс называют *неравновесным*. При заданных внешних воздействиях реальные процессы в термодинамической системе всегда происходят с некоторой конечной скоростью изменения параметров термодинамического состояния, поэтому они всегда будут неравновесными. Однако в ряде случаев, когда состояние термодинамической системы меняется достаточно медленно, процесс приближенно можно считать равновесным.

Равновесный процесс, который и в прямом, и в обратном направлениях проходит через одну и ту же последовательность состояний, носит название *обратимого*. В противном случае термодинамический процесс называют

*необратимым*. Необратимые термодинамические процессы характеризуются *рассеянием (диссипацией) энергии*.

К числу параметров термодинамического состояния в зависимости от необходимости учета различных процессов, протекающих в термодинамической системе, относят, например, плотность, абсолютную температуру, тензор деформации, а также параметры, учитывающие внутреннюю структуру рассматриваемого тела, которые носят название *внутренних параметров состояния системы*.

Поскольку параметры термодинамического состояния системы отражают физическую структуру материала, вид связей в этих уравнениях может быть достаточно разнообразен. Однако несмотря на это они не могут быть произвольными: вид каждого уравнения должен подчиняться основным принципам — взаимной связи, причинности, равноприсутствия, объективности, локальности, затухающей памяти, допустимости, а также нулевому закону термодинамики. Наряду с этим должны выполняться законы сохранения и второй закон термодинамики.

Суть указанных выше принципов заключается в следующем. В соответствии с *принципом взаимной связи* сплошная среда имеет разные состояния, которые могут быть описаны с помощью известного числа величин (базисных), причем все остальные величины получаются из них при помощи некоторых определяющих зависимостей. Выбор базисных величин, определяющих состояние термодинамической системы, не является однозначным.

Если ввести понятия *реактивных* и *активных переменных*, причем первые характеризуют реакцию материала на внешние термодинамические воздействия, а вторые — внутренние силы, порожденные этими воздействиями, то каждое активное переменное связано с реактивными переменными с помощью определяющего уравнения. При этом также существует и обратная связь, т. е. каждое реактивное переменное зависит от активных переменных. В соответствии с *принципом причинности* любое активное переменное может зависеть от настоящих и прошлых значений реактивных переменных, но не от их значений в будущем.

*Принцип равноприсутствия* гласит, что если какая-либо величина присутствует в определяющем уравнении в качестве независимого переменного, то она может присутствовать и в остальных определяющих зависимостях.

*Принцип объективности* гласит, что определяющие уравнения сохраняют свой вид при произвольных вращениях и трансляциях в пространстве и времени исследуемого тела как абсолютно твердого. Смысл *принципа локальности* заключается в том, что значения активных переменных и эволюционные уравнения для внутренних параметров состояния системы в окрестности рассматриваемой точки определяются только значениями реактивных переменных в окрестности этой точки. Если отказаться от принципа локальности, то возможно построение более сложных, нелокальных моделей сплошной среды.



Согласно *принципу затухающей памяти* более отдаленные в прошлом состояния термодинамической системы слабее влияют на значения активных и реактивных переменных в данный момент времени.

Согласно *принципу допустимости* все предложения, связанные с определяющими уравнениями и уравнениями эволюции внутренних параметров состояния, должны находиться в соответствии с законами сохранения и ограничениями, следующими из второго закона термодинамики.

*Нулевой закон термодинамики* гласит, что любая изолированная термодинамическая система имеет по крайней мере одно *естественное состояние*, в котором может находиться неограниченно долго.

**3.2. Закон сохранения массы.** Положим, что в начальной конфигурации рассматриваемое тело занимает объем  $V_0$  и ограничено поверхностью  $S_0$ . Тогда при переходе к последующей (актуальной) конфигурации это тело будет занимать объем  $V$  и будет ограничено поверхностью  $S$ . Пусть в начальной конфигурации объем  $dV_0$  есть прямоугольный параллелепипед с ребрами  $da_1, da_2, da_3$ , т. е.  $dV_0 = da_1 da_2 da_3$ .

При переходе к последующей конфигурации элементарный объем не разрушается. Он приобретает вид косоугольного параллелепипеда, проекциями ребер которого на оси пространственной системы координат  $ox_1x_2x_3$  будут  $dx_i^{(1)}, dx_i^{(2)}$  и  $dx_i^{(3)}$ . Ребро  $da_1$  элементарного параллелепипеда в начальной конфигурации преобразовалось в ребро с проекциями  $dx_i^{(1)}$  в последующей,  $da_2$  — в ребро с проекциями  $dx_i^{(2)}$  и  $da_3$  — в ребро с проекциями  $dx_i^{(3)}$ . Величина элементарного объема  $dV$  параллелепипеда в последующей конфигурации

$$dV = \left( d\mathbf{x}^{(1)} \times d\mathbf{x}^{(2)} \right) \cdot d\mathbf{x}^{(3)} = e_{ijk} dx_i^{(1)} dx_j^{(2)} dx_k^{(3)}. \quad (3.1)$$

Воспользовавшись уравнениями (2.6), задающими положение в пространстве в момент времени  $t$  материальной точки с начальными координатами  $a_1, a_2, a_3$ , выражение (3.1) можно переписать в виде

$$dV = e_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial a_1} \frac{\partial x_j}{\partial a_2} \frac{\partial x_k}{\partial a_3} da_1 da_2 da_3 = J dV_0, \quad (3.2)$$

откуда следует, что якобиан характеризует относительное изменение элементарного объема сплошной среды при переходе от начальной конфигурации к последующей.

При переходе от начальной конфигурации к последующей тело непрерывно изменяет плотность массы от  $\rho_0(a_1, a_2, a_3) = dm/dV_0$  до  $\rho(x_1, x_2, x_3, t) = dm/dV$ , где

$$m = \int_{V_0} \rho_0 dV_0 = \int_V \rho dV$$

— масса тела.

Если положить, что в процессе рассматриваемого перехода обмен массой между двумя бесконечно близкими точками не происходит, то

$$dm = \rho_0 dV_0 = \rho dV. \quad (3.3)$$

Подставив выражение (3.2) в равенство (3.3) и сократив левую и правую части равенства на  $dV_0$ , получим уравнение

$$\rho_0 = \rho J, \quad (3.4)$$

выражающее закон сохранения массы, или уравнение неразрывности в материальных координатах. Очевидно, что в силу независимости  $\rho_0$  от времени  $d(\rho J)/dt = 0$ .

Если рассматриваемое тело в процессе деформации не обменивается массой с окружающей средой (закрытая термодинамическая система), то

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho_0 dV_0 = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV,$$

причем левая часть последнего равенства равна нулю. Если вычислить полную производную по времени в правой части равенства с учетом выражения (3.3) и соотношения  $dJ/dt = J \partial v_k / \partial x_k$ , то

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho dV &= \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho J dV_0 = \int_{V_0} \frac{d}{dt} (\rho J) dV_0 = \int_{V_0} \left( \frac{d\rho}{dt} J + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} J \right) dV_0 = \\ &= \int_{V_0} \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) J dV_0 = \int_V \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) dV. \end{aligned}$$

Отсюда в силу принципа локальности следует

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (3.5)$$

— закон сохранения массы (уравнение неразрывности) в пространственных координатах. Уравнение (3.5) можно записать иначе:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k) = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (3.6)$$

где  $\partial \rho / \partial t$  — локальное изменение плотности во времени,  $\partial(\rho v_k) / \partial x_k$  — ее конвективное изменение.

**3.3. Закон сохранения количества движения.** *Количеством движения*  $\mathbf{P}(t)$  произвольного тела объемом  $V$  и ограниченного поверхностью  $S$  в актуальной конфигурации называется величина, определяемая в проекциях на оси пространственной системы координат формулой

$$P_i(t) = \int_V \rho v_i dV, \quad \text{или} \quad \mathbf{P}(t) = \int_V \rho \mathbf{v} dV.$$

В процессе деформации на рассматриваемое тело действуют массовые силы интенсивностью  $\mathbf{b}$ . Кроме того, на каждый элемент  $dS$  поверхности

действуют поверхностные силы  $\mathfrak{f}^{(n)}$ . При этом каждая частица тела имеет скорость  $\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t)$ . Тогда для любого объема  $V$  сплошной среды можно записать уравнение закона сохранения количества движения, в соответствии с которым скорость изменения количества движения тела равна сумме всех действующих на это тело внешних поверхностных и массовых сил, т. е.

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV = \int_V \rho b_i dV + \int_S \sigma_i^{(n)} dS,$$

или

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \rho \mathbf{b} dV + \int_S \mathfrak{f}^{(n)} dS. \quad (3.7)$$

Необходимо отметить, что равенство (3.7) является основным постулируемым динамическим соотношением механики сплошной среды. Как второй закон Ньютона является исходным в механике материальной точки, так и уравнение (3.7) лежит в основе механики сплошной среды и является исходным для исследования любых движений сплошной среды.

После дифференцирования в левой части равенства (3.7) получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV &= \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho v_i J dV_0 = \int_{V_0} \left[ v_i \frac{d}{dt} (\rho J) + \rho J \frac{dv_i}{dt} \right] dV_0 = \\ &= \int_{V_0} \rho \frac{dv_i}{dt} J dV_0 = \int_V \rho \frac{dv_i}{dt} dV. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Подставив во второе слагаемое правой части равенства (3.7) соотношения (2.73) и перейдя от интеграла по поверхности к интегралу по объему при помощи теоремы Остроградского–Гаусса, получим

$$\int_S \sigma_i^{(n)} dS = \int_S \sigma_{ji} n_j dS = \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV. \quad (3.9)$$

С учетом соотношений (3.8) и (3.9) уравнение (3.7) принимает вид

$$\int_V \left( \rho \frac{dv_i}{dt} - \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} - \rho b_i \right) dV = 0, \quad (3.10)$$

откуда следует локальная формулировка закона сохранения количества движения:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} - \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} - \rho b_i = 0,$$

или

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathfrak{f}} - \rho \mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (3.11)$$

Естественно, что уравнения (3.10) и (3.11) при помощи соотношений (2.54) могут быть записаны с использованием вектора перемещения  $\mathbf{U}(x_1, x_2, x_3, t)$ .

Локальная формулировка закона сохранения количества движения (3.11) может быть представлена в иной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j - \sigma_{ji}) - \rho b_i = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) - \rho \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (3.12)$$

называемой *дивергентной*. Уравнения (3.11) легко получить из уравнений (3.12) путем вычисления соответствующих частных производных и использования уравнения неразрывности (3.6).

Для получения уравнений закона сохранения количества движения относительно осей материальной системы координат воспользуемся соотношениями (2.80) и (2.79). Тогда

$$\begin{aligned} \int_S \sigma_i^{(n)} dS + \int_V \rho b_i dV &= \int_S \sigma_{ji} n_j dS + \int_V \rho b_i dV = \int_{S_0} J^{-1} T_{pj} \frac{\partial x_i}{\partial a_p} J \frac{\partial a_m}{\partial x_j} N_m dS_0 + \\ &+ \int_{V_0} \rho_0 b_i dV_0 = \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial a_m} \left( T_{pj} \frac{\partial x_i}{\partial a_p} \frac{\partial a_m}{\partial a_j} \right) dV_0 + \int_{V_0} \rho_0 b_i dV_0 = \\ &= \int_{V_0} \left[ \frac{\partial}{\partial a_m} (T_{pj} \delta_{ij} \delta_{mp}) - \rho_0 b_i \right] dV_0 = \int_{V_0} \left( \frac{\partial T_{mi}}{\partial a_m} + \rho_0 b_i \right) dV_0. \end{aligned}$$

Из соотношений (3.3) и (3.4) с учетом (2.5) следует, что

$$\int_V \rho \frac{dv_i}{dt} dV = \int_{V_0} \rho_0 \frac{dv_i}{dt} dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 \frac{d^2 u_i}{dt^2} dV_0.$$

Тогда уравнения закона сохранения количества движения в системе материальных координат примут вид

$$\rho_0 \frac{d^2 u_i}{dt^2} - \frac{\partial T_{mi}}{\partial a_m} - \rho_0 b_i = 0,$$

или

$$\rho_0 \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} - \nabla_{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{T}} - \rho_0 \mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (3.13)$$

Для записи уравнений (3.13) можно также использовать второй тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа из соотношений (2.81). Тогда уравнения (3.13) следует записать в виде

$$\rho_0 \frac{d^2 u_i}{dt^2} - \frac{\partial}{\partial a_m} \left( \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \tilde{T}_{mj} \right) - \rho_0 b_i = 0,$$

или

$$\rho_0 \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} - \nabla_{\mathbf{a}} \cdot \left( \widehat{\mathbf{F}}^T \cdot \widehat{\mathbf{T}} \right) - \rho_0 \mathbf{b} = 0. \quad (3.14)$$

Уравнения закона сохранения количества движения (3.11), (3.13) и (3.14) иногда называют *законом движения Коши*.

**3.4. Закон сохранения момента количества движения.** *Моментом количества движения*  $\mathbf{N}(t)$  произвольного тела объемом  $V$  и ограниченного поверхностью  $S$  в актуальной конфигурации относительно точки  $o$  называется величина, определяемая в проекциях на оси пространственной системы координат формулой

$$N_i(t) = \int_V e_{ijk} x_j v_k \rho dV, \quad \text{или} \quad \mathbf{N}(t) = \int_V \mathbf{x} \times \mathbf{v} \rho dV.$$

В соответствии с *законом сохранения момента количества движения* полная производная по времени от момента количества движения относительно точки  $o$  равна сумме моментов действующих на рассматриваемое тело массовых сил интенсивностью  $\mathbf{b}$  и поверхностных сил интенсивностью  $\boldsymbol{\sigma}^{(n)}$ , вызванных внешними по отношению к телу материальными объектами, т. е.

$$\frac{d}{dt} \int_V e_{ijk} x_j v_k \rho dV = \int_V e_{ijk} x_j b_k \rho dV + \int_S e_{ijk} x_j \sigma_k^{(n)} dS,$$

или

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{x} \times \mathbf{v} \rho dV = \int_V \mathbf{x} \times \mathbf{b} \rho dV + \int_S \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}^{(n)} dS. \quad (3.15)$$

При записи уравнений (3.15) мы не учитывали действие на тело распределенных массовых и поверхностных пар сил (моментов). Это делается при построении математических моделей сплошной среды, называемых микрополяримыми.

Вычисляя полную производную по времени в левой части первых уравнений из (3.15), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V e_{ijk} x_j v_k \rho dV &= \frac{d}{dt} \int_{V_0} e_{ijk} x_j v_k \rho J dV_0 = \\ &= \int_{V_0} e_{ijk} \left[ \frac{dx_j}{dt} v_k \rho J + x_j \frac{dv_k}{dt} \rho J + x_j v_k \frac{d(\rho J)}{dt} \right] dV_0 = \\ &= \int_V e_{ijk} \left( \frac{dx_j}{dt} v_k + x_j \frac{dv_k}{dt} \right) \rho dV. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Переходя во втором слагаемом в правой части тех же уравнений из (3.15) с помощью теоремы Остроградского–Гаусса от интеграла по поверхности

к интегралу по объему, получим

$$\begin{aligned} \int_V e_{ijk} x_j \sigma_k^{(n)} dS &= \int_S e_{ijk} x_j \sigma_{mk} n_m dS = \int_V e_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_m} (x_j \sigma_{mk}) dV = \\ &= \int_V e_{ijk} \left( \frac{\partial x_j}{\partial x_m} \sigma_{mk} + x_j \frac{\partial \sigma_{mk}}{\partial x_m} \right) dV. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Подставив результаты вычислений из (3.16) и (3.17) в первую группу уравнений из (3.15), с учетом уравнений (3.11) получим

$$\begin{aligned} \int_V e_{ijk} \left( \rho \frac{dx_j}{dt} v_k + \rho x_j \frac{dv_k}{dt} - x_j \rho b_k - x_j \frac{\partial \sigma_{mk}}{\partial x_m} - \frac{\partial x_j}{\partial x_m} \sigma_{mk} \right) dV = \\ = \int_V e_{ijk} \left[ x_j \left( \rho \frac{dv_k}{dt} - \rho b_k - \frac{\partial \sigma_{mk}}{\partial x_m} \right) + \left( \rho \frac{dx_j}{dt} v_k - \frac{\partial x_j}{\partial x_m} \sigma_{mk} \right) \right] dV = \\ = \int_V e_{ijk} (\rho v_j v_k - \sigma_{jk}) dV. \end{aligned}$$

Поскольку  $e_{ijk} v_j v_k \equiv 0$  ( $e_{123} v_2 v_3 + e_{132} v_3 v_2 \equiv 0$ , так как  $e_{123} = -e_{132} = 1$  и т. д.), то интегральная формулировка закона сохранения момента количества движения сплошной среды в пространственной системе координат принимает вид

$$\int_V e_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0,$$

откуда, в силу принципа локальности, следует локальная формулировка этого закона:

$$\sigma_{jk} - \sigma_{kj} = 0. \quad (3.18)$$

Соотношения (3.18) устанавливают симметрию тензора напряжений Коши при эйлеровом способе описания движения и отсутствии распределенных объемных и поверхностных пар сил.

Для получения локальной формулировки закона сохранения момента количества движения в системе лагранжевых координат воспользуемся соотношениями (2.80), откуда следует равенство

$$T_{mj} \frac{\partial x_k}{\partial a_m} = T_{mk} \frac{\partial x_j}{\partial a_m}.$$

Если в качестве материальной меры напряженного состояния использовать второй тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа, то, с учетом соотношений (2.81), получим

$$\frac{\partial x_j}{\partial a_m} \frac{\partial x_k}{\partial a_i} \tilde{T}_{im} = \frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial x_j}{\partial a_m} \tilde{T}_{mi}.$$

Симметрия тензора  $\hat{\tilde{T}}$  из последнего равенства очевидна.

**3.5. Закон сохранения энергии.** Закон сохранения энергии (первый закон термодинамики) гласит, что скорость изменения во времени полной энергии  $E$  произвольного объема сплошной среды равна сумме мощностей  $W$  действующих на термодинамическую систему механических сил и изменений всех других энергий  $Q_\alpha$  термодинамической системы в единицу времени:

$$\frac{dE}{dt} = W + \sum_{\alpha} \frac{dQ_{\alpha}}{dt}. \quad (3.19)$$

В общем случае  $dQ_{\alpha}/dt$  представляют собой мощности тепловой, электромагнитной, химической и др. видов энергии, поступающей в рассматриваемую термодинамическую систему в единицу времени.

При исследовании термомеханических явлений мы, в основном, имеем дело с механической энергией и ее превращением в теплоту и наоборот. Поэтому из всех  $Q_{\alpha}$  будем рассматривать только один вид немеханической энергии — тепловую  $Q$ , так что (3.19) принимает вид

$$\frac{dE}{dt} = W + \frac{dQ}{dt}. \quad (3.20)$$

Полная энергия представляет собой сумму кинетической

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho v_i v_i dV, \quad \text{или} \quad K = \frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV, \quad (3.21)$$

и внутренней

$$U = \int_V \rho u dV \quad (3.22)$$

энергий, где  $u$  — массовая плотность внутренней энергии.

При записи соотношения (3.21) не учитывались слагаемые, определяющие вклад в кинетическую энергию, связанный с вращением, так как мы не рассматриваем распределенные поверхностные и массовые пары сил.

Сумма скоростей работы (мощность), совершаемой над системой, состоит из двух слагаемых. Первое представляет собой мощность сил, действующих на поверхность  $S$ , ограничивающую рассматриваемое тело:

$$W^{(1)} = \int_S \sigma_i^{(n)} v_i dS, \quad \text{или} \quad W^{(1)} = \int_S \boldsymbol{\sigma}^{(n)} \cdot \mathbf{v} dS, \quad (3.23)$$

а второе — мощность объемных сил:

$$W^{(2)} = \int_V \rho b_i v_i dV, \quad \text{или} \quad W^{(2)} = \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV. \quad (3.24)$$

Количество теплоты  $dQ/dt$ , которое приобретает тело в единицу времени, образуется также из двух частей:

$$\frac{dQ^{(1)}}{dt} = \int_V \rho r dV \quad (3.25)$$

— теплоты, полученной за счет взаимодействия объема рассматриваемого тела с окружающей средой, где  $r$  — массовая плотность мощности тепловых источников (стоков), и

$$\frac{dQ^{(2)}}{dt} = - \int_S q_i n_i dS, \quad \text{или} \quad \frac{dQ^{(2)}}{dt} = - \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (3.26)$$

— теплоты, приобретенной телом за счет взаимодействия с окружающей средой через граничную поверхность  $S$ , где  $\mathbf{q}$  — вектор плотности теплового потока с компонентами  $q_i$ .

Уравнение (3.20) с учетом соотношений (3.21)–(3.26) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_V \rho v_i v_i dV + \frac{d}{dt} \int_V \rho u dV = \int_S \sigma_i^{(n)} v_i dS + \int_V \rho b_i v_i dS - \int_S q_i n_i dS + \int_V \rho r dV. \quad (3.27)$$

Уравнение (3.27) представляет собой *интегральную формулировку закона сохранения* энергии для любых термомеханических процессов, протекающих в теле объемом  $V$  и ограниченной поверхностью  $S$ .

Преобразуем первое слагаемое в левой части уравнения (3.27):

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_V \rho v_i v_i dV = \int_{V_0} v_i \frac{dv_i}{dt} \rho J dV_0 + \frac{1}{2} \int_V v_i v_i \frac{d}{dt} (\rho J) dV = \int_V \rho v_i \frac{dv_i}{dt} dV. \quad (3.28)$$

Далее,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho u dV = \int_{V_0} \rho \frac{du}{dt} J dV_0 + \int_{V_0} u \frac{d}{dt} (\rho J) dV_0 = \int_V \rho \frac{du}{dt} dV. \quad (3.29)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (3.27) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_S \sigma_i^{(n)} v_i dS &= \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ji} v_i) dV = \int_V \left( \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} v_i + \sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) dV = \\ &= \int_V \left( \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} v_i + \sigma_{ji} V_{ij} + \sigma_{ji} W_{ij} \right) dV = \int_V \left( \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} v_i + \sigma_{ji} V_{ij} \right) dV, \end{aligned} \quad (3.30)$$

где  $\partial v_i / \partial x_j = V_{ij} + W_{ij}$ . При записи соотношения (3.30) учтено очевидное равенство

$$\int_V \sigma_{ij} W_{ij} dV = 0.$$

Наконец, третье слагаемое в правой части уравнения (3.27) преобразуем так:

$$\int_S q_i n_i dS = \int_V \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dV. \quad (3.31)$$



Подставляя результаты преобразований (3.28)–(3.31) в уравнение (3.27), получим

$$\int_V \rho v_i \frac{dv_i}{dt} dV + \int_V \rho \frac{du}{dt} dV = \int_V \left( \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} v_i + \sigma_{ji} V_{ij} \right) dV + \\ + \int_V \rho b_i v_i dV - \int_V \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dV + \int_V \rho r dV,$$

откуда после приведения подобных членов и с учетом равенства (3.10) следует

$$\int_V \left( \rho \frac{du}{dt} - \sigma_{ji} V_{ij} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - \rho r \right) dV = 0.$$

В силу принципа локальности из последнего соотношения следует *локальная формулировка закона сохранения энергии*:

$$\rho \frac{du}{dt} = \sigma_{ji} V_{ij} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho r, \quad \text{или} \quad \rho \frac{du}{dt} = \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \widehat{\mathbf{V}} - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q} + \rho r. \quad (3.32)$$

Если воспользоваться соотношением (2.67), связывающим тензор градиента скорости с эйлеровым тензором скоростей деформации, то уравнение (3.32) примут вид

$$\rho \frac{du}{dt} = \sigma_{ji} F_{mk} \frac{dE_{jm}}{dt} F_{ik} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho r,$$

или

$$\rho \frac{du}{dt} = \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \widehat{\mathbf{F}}^T \cdot \frac{d\widehat{\mathbf{E}}}{dt} \cdot \widehat{\mathbf{F}} - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q} + \rho r. \quad (3.33)$$

Закон сохранения энергии в системе лагранжевых координат имеет вид

$$\rho_0 \frac{du}{dt} = T_{mj} \frac{dL_{km}}{dt} H_{kj} - \frac{\partial}{\partial a_m} (q_i J H_{mi}) + \rho_0 r,$$

или

$$\rho_0 \frac{du}{dt} = \widehat{\mathbf{T}} \cdot \frac{d\widehat{\mathbf{L}}}{dt} \cdot \widehat{\mathbf{H}} - \nabla_{\mathbf{a}} \cdot \left( J \mathbf{q} \cdot \widehat{\mathbf{H}}^T \right) + \rho_0 r. \quad (3.34)$$

При записи уравнений (3.34) использованы соотношения (2.66), (2.79) и (2.80). Если в качестве реактивной переменной использовать второй тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа, то в силу соотношений (2.83) закон сохранения энергии в локальной формулировке будет иметь вид

$$\rho_0 \frac{du}{dt} = \widetilde{T}_{km} \frac{dL_{mk}}{dt} - \frac{\partial}{\partial a_m} (q_0 m) + \rho_0 r,$$

или

$$\rho_0 \frac{du}{dt} = \widehat{\mathbf{T}} \cdot \frac{d\widehat{\mathbf{L}}}{dt} - \nabla_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{q}_0 + \rho_0 r, \quad (3.35)$$

где  $\mathbf{q}_0(\mathbf{a}, t) = J \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \widehat{\mathbf{H}}^T$ .

Наконец, последняя форма представления закона сохранения энергии — дивергентная — имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho e v_j - \sigma_{ji} v_i + q_i) - \rho b_i v_i - \rho r = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho e \mathbf{v} - \hat{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q}) - \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} - \rho r = 0, \quad (3.36)$$

где  $e = v_i v_i / 2 + u$  — массовая плотность полной энергии.

Уравнение (3.32) может быть получено из (3.36) путем очевидных преобразований с учетом выражений (3.6) и (3.12).

**3.6. Второй закон термодинамики.** Одной из основных и фундаментальных характеристик любой термодинамической системы является то, насколько она холодна или горяча в данный момент времени. Степень охлаждения или нагрева описывают с помощью понятия температуры. В классической термодинамике понятие температуры вводят для равновесного состояния термодинамической системы. При этом постулируют, что две системы, каждая из которых находится в равновесии с третьей системой, находятся в равновесии и между собой. Можно показать, что равновесие трех систем означает существование у них для задания состояния термодинамической системы общего переменного, называемого температурой. Любая из этих трех систем может играть роль термометра, который показывает температуру на некоторой удобной, но произвольной шкале. Таким образом, *температура*  $T$  — вещественное число, показываемое термометром.

Все имеющиеся экспериментальные данные свидетельствуют о том, что каков бы ни был масштаб используемого термометра, существует температура, ниже которой никакая термодинамическая система не может быть охлаждена, т. е. температура ограничена снизу. Если точная нижняя грань принята за нуль, то температуру называют *абсолютной* и при любом масштабе

$$T > 0.$$

Наряду с абсолютной температурой  $T$  будем считать фундаментальным свойством всех термодинамических систем энтропию  $H$ . *Энтропией* будем называть термодинамическую функцию состояния системы, определяющую меру необратимого рассеяния энергии.

В классической термостатике понятие энтропии вводят следующим образом. Пусть  $\delta Q$  — бесконечно малое количество теплоты, получаемое термодинамической системой при соответствующих значениях абсолютной температуры  $T$ . Тогда для системы, совершающей бесконечно медленно циклический процесс, выполняется равенство

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

Смысл данного равенства заключается в том, что выражение

$$dH = \frac{\delta Q}{T}$$

представляет собой полный дифференциал. В дальнейшем понятие энтропии было обобщено на необратимые процессы, для которых

$$\oint \frac{\delta Q}{T} < 0$$

и  $\delta Q/T$  по-прежнему остается полным дифференциалом.

Из этого неравенства следует, что

$$H_B - H_A > \int_A^B \frac{\delta Q}{T} \quad (3.37)$$

и интегрирование ведется вдоль пути любого необратимого термодинамического процесса, связывающего состояния  $A$  и  $B$ . Очевидно, что разность  $H_B - H_A$  не зависит от пути интегрирования.

Введенное таким образом понятие энтропии применимо к исследованию ограниченного класса термодинамических явлений. Неравенство (3.37) применимо только для квазистатических процессов, т. е. процессов, протекающих бесконечно медленно. Оно дает возможность оценить меру необратимости этих процессов, но не позволяет получить ограничения на определяющие уравнения, описывающие изменения термодинамических параметров и переменных системы.

В дальнейшем будем полагать энтропию  $H$ , наряду с абсолютной температурой  $T$ , фундаментальным свойством любых термодинамических систем. Энтропия — аддитивная функция, присущая любому количеству материи, т. е. энтропия любого тела объемом  $V$  и ограниченной поверхностью  $S$  равна сумме энтропий его частей. Для сплошной среды полагают, что  $H$  — непрерывная функция и

$$H = \int_V \rho h dV,$$

где  $h$  — массовая плотность энтропии.

Изменение энтропии термодинамической системы происходит как вследствие изменений, происходящих внутри системы, так и в результате взаимодействия с окружающей средой. Тогда полное производство энтропии в теле в единицу времени определяется формулой

$$\Gamma \equiv \frac{dH}{dt} = \int_V \rho s dV + \int_S \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (3.38)$$

где  $s$  — поступление энтропии за единицу времени на единицу массы от внутренних источников;  $\boldsymbol{\eta}$  — вектор потока энтропии,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности  $S$ .

Соотношение (3.38) дает возможность постулировать второй закон термодинамики в форме *неравенства Клаузиуса–Дюгема*: общее производство энтропии в термодинамической системе всегда неотрицательно, т. е.  $\Gamma \geq 0$ . Это означает, что

$$\frac{dH}{dt} \geq \int_V \rho s \, dV - \int_S \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (3.39)$$

т. е. скорость изменения энтропии  $H$  термодинамической системы всегда не меньше суммы производства энтропии внутренними источниками и притока энтропии через граничную поверхность.

Переходя в неравенстве (3.39) от интеграла по поверхности к интегралу по объему и используя уравнение (3.6), в силу принципа локальности получаем

$$\rho \frac{dh}{dt} \geq -\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\eta} + \rho s. \quad (3.40)$$

Величины  $\boldsymbol{\eta}$  и  $s$  можно представить в виде

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\mathbf{q}}{T} + \bar{\boldsymbol{\eta}}, \quad s = \frac{r}{T} + \bar{s}, \quad (3.41)$$

где  $\mathbf{q}/T$  — приток энтропии, обусловленный притоком теплоты,  $r/T$  — производство энтропии внутренними источниками теплоты,  $\bar{\boldsymbol{\eta}}$  и  $\bar{s}$  — соответственно приток и производство энтропии, обусловленные всеми прочими эффектами.

*Простым термомеханическим процессом* называют такой процесс, в котором  $\bar{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{0}$  и  $\bar{s} = 0$ , так что неравенство Клаузиуса–Дюгема принимает вид

$$\rho T \frac{dh}{dt} \geq -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{1}{T} q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} + \rho r,$$

или

$$\rho T \frac{dh}{dt} \geq -\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q} + \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} T + \rho r. \quad (3.42)$$

Отметим, что в дальнейшем мы будем рассматривать в основном простые термомеханические процессы.

Если воспользоваться системой лагранжевых координат, то неравенство Клаузиуса–Дюгема (3.42) примет вид

$$\rho_0 T \frac{dh}{dt} \geq -\frac{\partial q_{0j}}{\partial a_j} + \frac{1}{T} q_{0j} \frac{\partial T}{\partial a_j} + \rho_0 r,$$

или

$$\rho_0 T \frac{dh}{dt} \geq -\nabla_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{q}_0 + \frac{1}{T} \mathbf{q}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{a}} T + \rho_0 r. \quad (3.43)$$

Второй закон термодинамики (неравенство Клаузиуса–Дюгема) можно записать и в дивергентной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho h v_i + \frac{q_i}{T} \right) - \frac{\rho r}{T} \geq 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left( \rho h \mathbf{v} + \frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \frac{\rho r}{T} \geq 0. \quad (3.44)$$

В дальнейшем мы будем часто использовать еще одну термодинамическую функцию — *свободную энергию*. При этом массовая плотность свободной энергии  $A$  связана с массовой плотностью  $u$  и внутренней энергии  $h$  преобразованием Лежандра:

$$A = u - Th. \quad (3.45)$$

Смысл введения в рассмотрение нового активного переменного  $A$  заключается в следующем. Аргументом активного переменного  $A$  является, наряду с другими аргументами, абсолютная температура  $T$  — экспериментально определяемая величина. Аргументом же активного переменного  $u$  является, наряду с другими аргументами, массовая плотность энтропии  $h$  — величина в принципе экспериментально не определяемая. Поэтому естественно стремление иметь в числе аргументов рассматриваемых активных переменных те реактивные переменные, которые могут быть определены экспериментально.

Если продифференцировать левую и правую части равенства (3.45) по времени и полученный результат объединить с уравнением (3.32), то закон сохранения энергии примет вид

$$\rho T \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho r + \delta, \quad \text{или} \quad \rho T \frac{dh}{dt} = -\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q} + \rho r + \delta, \quad (3.46)$$

где  $\delta = \sigma_{ij} V_{ij} - \rho \left( \frac{dA}{dt} + h \frac{dT}{dt} \right)$ , или  $\delta = \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \widehat{\mathbf{V}} - \rho \left( \frac{dA}{dt} + h \frac{dT}{dt} \right)$ , — *диссипативная функция*, определяющая необратимое рассеяние энергии в термодинамической системе при необратимых процессах.

Вычитая далее из неравенства (3.42) равенство (3.46), получим *общее диссипативное неравенство*:

$$-\frac{1}{T} q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} + \delta \geq 0, \quad \text{или} \quad -\frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} T + \delta \geq 0. \quad (3.47)$$

При применении лагранжевых координат диссипативная функция имеет вид

$$\delta = (\widehat{\mathbf{T}} \cdot \widehat{\mathbf{H}}) \cdot \frac{d\widehat{\mathbf{L}}}{dt} - \rho \left( \frac{dA}{dt} + h \frac{dT}{dt} \right),$$

если используется первый тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа. Если же использовать тензор  $\widehat{\widehat{\mathbf{T}}}$ , то

$$\delta = \widehat{\widehat{\mathbf{T}}} \cdot \frac{d\widehat{\mathbf{L}}}{dt} - \rho \left( \frac{dA}{dt} + h \frac{dT}{dt} \right).$$

Общее диссипативное неравенство (3.47) легко может быть записано и в системе лагранжевых координат.

**3.7. Основные подходы к построению математических моделей в механике сплошной среды.** В зависимости от структуры материала рассматриваемого тела (например, кристаллической, аморфной, высокомолекулярной и т. д.) приложенные внешние механические и тепловые нагрузки вызывают определенные структурные изменения.

Для поликристаллических материалов внешние термомеханические воздействия вызывают появление в кристаллографических плоскостях касательных напряжений, которые являются причиной движения линейных дефектов (дислокаций). На макроуровне движение дислокаций приводит к возникновению неупругих деформаций. У материалов с высокомолекулярной структурой приложение внешней нагрузки вызывает раскручивание и переориентацию молекулярных цепей, происходит перераспределение молекулярных сегментов между упорядоченной и неупорядоченной частями полимера.

В том случае, когда характерное время изменения внешней нагрузки играет существенную роль, при разработке математических моделей в механике сплошной среды необходимо учитывать скоростные эффекты как при описании деформации, так и при описании процесса распространения теплоты. Поскольку при любом внешнем воздействии изменяется внутренняя энергия тела, для реальных материалов этот процесс обусловлен изменением структуры — происходит переход от одного термодинамического состояния к другому. Если характерное время изменения внешней нагрузки близко ко времени перехода термодинамической системы в новое состояние, то учет изменений структуры на микроуровне необходим.

Процессы, происходящие в сплошной среде на микроуровне, проявляются на макроуровне. Однако зачастую нас интересуют только некоторые аспекты этих процессов. В таких случаях целесообразно использовать упрощенные модели, отражающие лишь те свойства тел, которые представляют особый интерес. При других условиях нас могут интересовать иные аспекты взаимодействия тел, и мы можем использовать другие модели. Таким образом, каждому реальному телу можно сопоставить совокупность моделей, которые описывают отдельные стороны его сложного поведения.

Для получения определяющих уравнений математических моделей в механике сплошной среды в настоящее время используются три основных подхода, базирующиеся на рассмотрении сред с внутренними параметрами состояния, сред с памятью и сред скоростного типа.

Рассмотрим первый подход. Предположим, что состояние рассматриваемой сплошной среды в окрестности любой материальной точки определяется четырьмя термодинамическими функциями — активными переменными: массовыми плотностями свободной энергии  $A$  и энтропии  $h$ , вторым тензором напряжений Пиолы–Кирхгофа с компонентами  $\tilde{T}_{ji}$  и вектором плотности теплового потока с компонентами  $q_{0i}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Аргументами этих функций будем считать следующие реактивные переменные: тензор конечной деформации Грина с компонентами  $L_{kl}$ , абсолютную температуру  $T$ , материальный градиент температуры, компоненты которого

$\vartheta_k = \partial T / \partial a_k$ , и внутренние параметры состояния  $\chi^{(\alpha)}$ ,  $\chi_k^{(\beta)}$ ,  $\chi_{kl}^{(\gamma)}$  ( $\alpha = 1, \dots, \alpha_K$ ;  $\beta = 1, \dots, \beta_M$ ;  $\gamma = 1, \dots, \gamma_N$ ),  $k, l = 1, 2, 3$ .

Физический смысл этих параметров устанавливается в каждом конкретном случае. Тогда

$$\begin{aligned} A &= A(L_{kl}, T, \vartheta_k, \chi^{(\alpha)}, \chi_k^{(\beta)}, \chi_{kl}^{(\gamma)}), \\ h &= h(L_{kl}, T, \vartheta_k, \chi^{(\alpha)}, \chi_k^{(\beta)}, \chi_{kl}^{(\gamma)}), \\ \tilde{T}_{ji} &= \tilde{T}_{ji}(L_{kl}, T, \vartheta_k, \chi^{(\alpha)}, \chi_k^{(\beta)}, \chi_{kl}^{(\gamma)}), \\ q_{0i} &= q_{0i}(L_{kl}, T, \vartheta_k, \chi^{(\alpha)}, \chi_k^{(\beta)}, \chi_{kl}^{(\gamma)}). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Для определения внутренних параметров состояния термодинамической системы постулируем, что скорости их изменения определяются только состоянием системы:

$$\begin{aligned} \frac{d\chi^{(\alpha)}}{dt} &= \kappa^{(\alpha)}(L_{kl}, T, \vartheta_k, \chi^{(\alpha)}, \chi_k^{(\beta)}, \chi_{kl}^{(\gamma)}), \\ \frac{d\chi_i^{(\alpha)}}{dt} &= \kappa_i^{(\beta)}(L_{kl}, T, \vartheta_k, \chi^{(\alpha)}, \chi_k^{(\beta)}, \chi_{kl}^{(\gamma)}), \\ \frac{d\chi_{ij}^{(\gamma)}}{dt} &= \kappa_{ij}^{(\gamma)}(L_{kl}, T, \vartheta_k, \chi^{(\alpha)}, \chi_k^{(\beta)}, \chi_{kl}^{(\gamma)}). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Объединяя соотношения (3.45) и уравнение (3.35), получаем

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial A}{\partial L_{ij}} \frac{dL_{ij}}{dt} + \rho_0 \frac{\partial A}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \rho_0 \frac{\partial A}{\partial \chi^{(\alpha)}} \frac{d\chi^{(\alpha)}}{dt} + \rho_0 \frac{\partial A}{\partial \chi_i^{(\beta)}} \frac{d\chi_i^{(\beta)}}{dt} + \\ + \rho_0 \frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}^{(\gamma)}} \frac{d\chi_{ij}^{(\gamma)}}{dt} + \rho_0 \frac{\partial A}{\partial \vartheta_i} \frac{d\vartheta_i}{dt} + \rho_0 T \frac{dh}{dt} + \rho_0 h \frac{dT}{dt} - \tilde{T}_{ji} \frac{dL_{ij}}{dt} + \frac{\partial q_{0i}}{\partial a_i} - \rho_0 r = 0. \end{aligned}$$

Вычитая далее последнее выражение из неравенства (3.43), находим

$$\begin{aligned} - \left( \rho_0 \frac{\partial A}{\partial L_{ij}} - \tilde{T}_{ji} \right) \frac{dL_{ij}}{dt} - \rho_0 \left( \frac{\partial A}{\partial T} + h \right) \frac{dT}{dt} - \rho_0 \frac{\partial A}{\partial \chi^{(\alpha)}} \frac{d\chi^{(\alpha)}}{dt} - \\ - \rho_0 \frac{\partial A}{\partial \chi_i^{(\beta)}} \frac{d\chi_i^{(\beta)}}{dt} - \rho_0 \frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}^{(\gamma)}} \frac{d\chi_{ij}^{(\gamma)}}{dt} - \rho_0 \frac{\partial A}{\partial \vartheta_i} \frac{d\vartheta_i}{dt} - \frac{\partial T}{\partial a_i} \frac{q_{0i}}{T} \geq 0. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Это неравенство линейно по отношению к скоростям изменения реактивных переменных, которые или не являются определяющими переменными ( $dL_{ij}/dt$ ,  $dT/dt$  и  $d\vartheta_i/dt$ ), или заданы уравнениями (3.49). Так как второй закон термодинамики справедлив для произвольных скоростей процессов, достаточным условием справедливости неравенства (3.50) являются равенства

$$\tilde{T}_{ji} = \rho_0 \frac{\partial A}{\partial L_{ij}}, \quad h = -\frac{\partial A}{\partial T}, \quad \frac{\partial A}{\partial \vartheta_i} = 0 \quad (3.51)$$

и неравенство

$$\rho_0 \frac{\partial A}{\partial \chi^{(\alpha)}} \frac{d\chi^{(\alpha)}}{dt} + \rho_0 \frac{\partial A}{\partial \chi_i^{(\beta)}} \frac{d\chi_i^{(\beta)}}{dt} + \rho_0 \frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}^{(\gamma)}} \frac{d\chi_{ij}^{(\gamma)}}{dt} + \frac{\partial T}{\partial a_i} \frac{q_{0i}}{T} \leq 0. \quad (3.52)$$

Из неравенства (3.52) следует, что уравнения (3.49) не могут быть произвольными, конкретная их форма должна выбираться с учетом неравенства (3.52). Отметим, что диссипативная функция в неравенстве (3.52)

$$\delta = -\rho_0 \frac{\partial A}{\partial \chi^{(\alpha)}} \frac{d\chi^{(\alpha)}}{dt} - \rho_0 \frac{\partial A}{\partial \chi_i^{(\beta)}} \frac{d\chi_i^{(\beta)}}{dt} - \rho_0 \frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}^{(\gamma)}} \frac{d\chi_{ij}^{(\gamma)}}{dt}.$$

Записав уравнение закона сохранения энергии (3.46) в системе лагранжевых координат и воспользовавшись равенствами (3.51), получим

$$-\rho_0 T \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \frac{dT}{dt} = \rho_0 T \left( \frac{\partial h}{\partial L_{ij}} \frac{dL_{ij}}{dt} - \frac{\partial h}{\partial \chi^{(\alpha)}} \frac{d\chi^{(\alpha)}}{dt} - \frac{\partial h}{\partial \chi_i^{(\beta)}} \frac{d\chi_i^{(\beta)}}{dt} - \frac{\partial h}{\partial \chi_{ij}^{(\gamma)}} \frac{d\chi_{ij}^{(\gamma)}}{dt} \right) - \frac{\partial q_{0i}}{\partial a_i} + \rho r + \delta. \quad (3.53)$$

Слагаемые, заключенные в скобки в правой части (3.53), характеризуют *термомеханическую связанность* процессов теплопроводности и деформации и изменения внутренних параметров состояния.

При использовании второго подхода для построения математических моделей в механике сплошной среды определяющие уравнения, связывающие активные и реактивные переменные, имеют интегральный вид:

$$\begin{aligned} A &= \mathcal{A} \Big|_{s=-\infty}^{s=t} \left[ L_{kl}(\mathbf{x}, s), T(\mathbf{x}, s), \vartheta_k(\mathbf{x}, s) \right], \\ h &= \mathcal{H} \Big|_{s=-\infty}^{s=t} \left[ L_{kl}(\mathbf{x}, s), T(\mathbf{x}, s), \vartheta_k(\mathbf{x}, s) \right], \\ \tilde{T}_{ji} &= \mathcal{J}_{ji} \Big|_{s=-\infty}^{s=t} \left[ L_{kl}(\mathbf{x}, s), T(\mathbf{x}, s), \vartheta_k(\mathbf{x}, s) \right], \\ q_{0i} &= \mathcal{Q}_i \Big|_{s=-\infty}^{s=t} \left[ L_{kl}(\mathbf{x}, s), T(\mathbf{x}, s), \vartheta_k(\mathbf{x}, s) \right], \end{aligned} \quad (3.54)$$

где каждое из активных переменных

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \Big|_{s=-\infty}^{s=t} [\cdot] &= \int_{-\infty}^t [\cdot] ds, & \mathcal{H} \Big|_{s=-\infty}^{s=t} [\cdot] &= \int_{-\infty}^t [\cdot] ds, \\ \mathcal{J}_{ji} \Big|_{s=-\infty}^{s=t} [\cdot] &= \int_{-\infty}^t [\cdot] ds, & \mathcal{Q}_i \Big|_{s=-\infty}^{s=t} [\cdot] &= \int_{-\infty}^t [\cdot] ds \end{aligned}$$

есть *функционал* — отображение множества функций  $L_{kl}(\mathbf{x}, s)$ ,  $T(\mathbf{x}, s)$  и  $\vartheta_k(\mathbf{x}, s)$  в множество действительных чисел. Подынтегральные функции



$L_{kl}(\mathbf{x}, s)$ ,  $T(\mathbf{x}, s)$  и  $\vartheta_k(\mathbf{x}, s)$  непрерывны при  $t \in (-\infty, \infty)$  и, кроме того,  $L_{kl}(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$ ,  $T(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} T_0$  и  $\vartheta_k(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$ .

Рассмотрим пространство  $\mathcal{U}$  упорядоченных троек:

$$\widehat{\Lambda}(t) = (L_{kl}\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, T, \vartheta_k \mathbf{e}_k) \in \mathcal{U},$$

где  $\widehat{\Lambda}(t)$  — локальное состояние рассматриваемой среды. В пространстве  $\mathcal{U}$  введем норму:

$$\|\widehat{\Lambda}(t)\| = [L_{kl}L_{kl} + T^2 + \vartheta_k\vartheta_k]^{1/2}.$$

Под локальной историей окрестности произвольной материальной точки сплошной среды будем понимать совокупность всех прошлых локальных состояний:

$$\widehat{\Lambda}^t(s) \equiv \widehat{\Lambda}(t - s), \quad s > 0.$$

В соответствии с принципом затухающей памяти состояние, более отдаленное в прошлое, слабее влияет на локальное состояние среды в данный момент. Это можно учесть с помощью функции памяти  $\gamma^2(s)$ , которая является монотонно убывающей, ограниченной, положительной и интегрируемой с квадратом:

$$\int_0^{\infty} \gamma^2(s) ds < +\infty, \quad \gamma^2(s) < +\infty.$$

Обозначим через  $\mathcal{H}$  пространство локальных историй, для которых норма

$$\|\widehat{\Lambda}(\cdot)\| \equiv \left[ \int_0^{\infty} \gamma^2(s) \widehat{\Lambda}^t(s) \cdot \widehat{\Lambda}^t(s) ds \right]^{1/2}$$

является конечной величиной. Если ввести скалярное произведение:

$$(\widehat{\Lambda}_1(\cdot), \widehat{\Lambda}_2(\cdot)) = \int_0^{\infty} \gamma^2(s) \widehat{\Lambda}_1^t(s) \cdot \widehat{\Lambda}_2^t(s) ds,$$

то пространство  $\mathcal{H}$  превратится в гильбертово пространство. Норма разности двух историй тогда имеет вид

$$\|\widehat{\Lambda}_1(\cdot) - \widehat{\Lambda}_2(\cdot)\| = \left[ \int_0^{\infty} \gamma^2(s) (\widehat{\Lambda}_1^t(s) - \widehat{\Lambda}_2^t(s)) \cdot (\widehat{\Lambda}_1^t(s) - \widehat{\Lambda}_2^t(s)) ds \right]^{1/2}. \quad (3.55)$$

Так как  $\gamma^2(s)$  — убывающая функция, то из соотношения (3.55) следует, что более отдаленные во времени различия локальных историй меньше влияют на норму.

В более общем виде определяющие уравнения сред с памятью могут быть представлены с помощью функционалов вида

$$\mathbf{F} = \mathbf{F} \left[ \widehat{\Lambda}(t), \widehat{\Lambda}^t(s) \right] \equiv \int_{s=-\infty}^{s=t} \mathcal{F} \left[ \widehat{\Lambda}(t), \widehat{\Lambda}^t(s) \right], \quad (3.56)$$

где локальное состояние  $\widehat{\Lambda}(t)$  и локальная история  $\widehat{\Lambda}^t(s)$  принадлежат соответственно нормированным пространствам  $\mathcal{U}$  и  $\mathcal{H}$ .

В дальнейшем нам потребуется некоторое обобщение операции дифференцирования функций.

Говорят, что функция  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема в  $\mathbb{R}$ , если существует функция  $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right) \rightarrow 0.$$

Пусть  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Обозначим через  $\mathbf{y}$  произвольный вектор из  $\mathbb{R}^3$ . Производной по направлению  $\mathbf{y}$  называют функцию  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , которая определяется равенством

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( \frac{g(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{y}) - g(\mathbf{x})}{\alpha} - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}) \right) \rightarrow 0.$$

Обобщением производной по направлению в функциональном пространстве является производная Гато. Пусть  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{G}$  — два банаховых пространства и пусть задана функциональная зависимость  $\mathbf{F}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ , где  $\mathcal{H}$  — открытое подмножество  $\mathcal{E}$ . Производной Гато называют функциональную зависимость  $d\mathbf{F}(\mathbf{x})(\mathbf{y}): \mathcal{H} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}$ , где  $\mathcal{H} \times \mathcal{E}$  — прямое произведение множеств, которая определяется равенством

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{y}) - \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\alpha} - d\mathbf{F}(\mathbf{x})(\mathbf{y}) \right) \rightarrow 0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{H}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}. \quad (3.57)$$

Величину  $d\mathbf{F}(\mathbf{x})(\mathbf{y})$  принято называть слабой производной.

Если предельный переход в (3.57) совершается по норме, то производная называется сильной, или производной Фреше:  $d\mathbf{F}(\mathbf{x} | \mathbf{y})$ . Если производная Фреше существует, то она является и производной Гато. В свою очередь, если производная Гато существует и непрерывна в точке  $\mathbf{x}$ , то она является и производной Фреше, т. е.

$$d\widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = d\mathbf{F}(\mathbf{x})(\mathbf{y}).$$

В дальнейшем ограничимся только этим случаем. Рассмотрим полную производную по времени от функционала (3.56):

$$\frac{d}{dt} \mathbf{F}(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}[\widehat{\Lambda}(t + \alpha), \widehat{\Lambda}^{t+\alpha}(s)] - \mathbf{F}[\widehat{\Lambda}(t), \widehat{\Lambda}^t(s)]}{\alpha}. \quad (3.58)$$

С помощью выражений для скорости изменения состояния:  $\dot{\widehat{\Lambda}}(t) = d\widehat{\Lambda}(t)/dt$ , и скорости изменения истории:

$$\dot{\widehat{\Lambda}}(s) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\widehat{\Lambda}^{t+\alpha}(s) - \widehat{\Lambda}^t(s)}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\widehat{\Lambda}(t + \alpha - s) - \widehat{\Lambda}(t - s)}{\alpha},$$

уравнение (3.58) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \mathbf{F}(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}[\widehat{\Lambda}(t) + \alpha \dot{\widehat{\Lambda}}(t), \widehat{\Lambda}^t(s) + \alpha \dot{\widehat{\Lambda}}^t(s)] - \mathbf{F}[\widehat{\Lambda}(t), \widehat{\Lambda}^t(s)]}{\alpha},$$

являющемся определением производной Гато. Следовательно, полную производную по времени от определяющего функционала можно представить как

$$\frac{d}{dt} \mathbf{F}(t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{\Lambda}} \mathbf{F} [\widehat{\mathbf{\Lambda}}(t), \widehat{\mathbf{\Lambda}}^t(s)] \cdot \dot{\widehat{\mathbf{\Lambda}}}(t) + d\mathbf{F} [\widehat{\mathbf{\Lambda}}(t), \widehat{\mathbf{\Lambda}}^t(s) | \dot{\widehat{\mathbf{\Lambda}}}^t(s)], \quad (3.59)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \widehat{\mathbf{\Lambda}}} \mathbf{F} [\widehat{\mathbf{\Lambda}}(t), \widehat{\mathbf{\Lambda}}^t(s) \cdot \dot{\widehat{\mathbf{\Lambda}}}(t)] &= \frac{\partial}{\partial L_{kl}} \mathbf{F} [\widehat{\mathbf{\Lambda}}(t), \widehat{\mathbf{\Lambda}}^t(s)] \frac{dL_{kl}}{dt} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial T} \mathbf{F} [\widehat{\mathbf{\Lambda}}(t), \widehat{\mathbf{\Lambda}}^t(s)] \frac{dT}{dt} + \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} \mathbf{F} [\widehat{\mathbf{\Lambda}}(t), \widehat{\mathbf{\Lambda}}^t(s)] \frac{d\vartheta_k}{dt}. \end{aligned}$$

С помощью первого соотношения из (3.54) и (3.59) диссипативное неравенство типа (3.47) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} - \left( \rho_0 \frac{\partial A}{\partial L_{ij}} [\widehat{\mathbf{\Lambda}}(t), \widehat{\mathbf{\Lambda}}^t(s)] - T_{ji} \right) \frac{dL_{ij}}{dt} - \rho_0 \left( \frac{\partial A}{\partial T} [\widehat{\mathbf{\Lambda}}(t), \widehat{\mathbf{\Lambda}}^t(s)] + h \right) \frac{dT}{dt} - \\ - \rho \frac{\partial A}{\partial \vartheta_i} [\widehat{\mathbf{\Lambda}}(t), \widehat{\mathbf{\Lambda}}^t(s)] \frac{d\vartheta_k}{dt} - \rho_0 dA [\widehat{\mathbf{\Lambda}}(t), \widehat{\mathbf{\Lambda}}^t(s) | \dot{\widehat{\mathbf{\Lambda}}}^t(s)] - \frac{\partial T}{\partial a_i} \frac{q_{0i}}{T} \geq 0. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Достаточные условия справедливости неравенства (3.60) для произвольного термодинамически допустимого процесса имеют вид

$$\begin{aligned} T_{ji} = \rho_0 \frac{\partial A}{\partial L_{ij}} [\widehat{\mathbf{\Lambda}}(t), \widehat{\mathbf{\Lambda}}^t(s)], \quad h = - \frac{\partial A}{\partial T} [\widehat{\mathbf{\Lambda}}(t), \widehat{\mathbf{\Lambda}}^t(s)], \\ \frac{\partial A}{\partial \vartheta_k} [\widehat{\mathbf{\Lambda}}(t), \widehat{\mathbf{\Lambda}}^t(s)] = 0, \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$- \rho_0 dA [\widehat{\mathbf{\Lambda}}(t), \widehat{\mathbf{\Lambda}}^t(s) | \dot{\widehat{\mathbf{\Lambda}}}^t(s)] - \frac{\partial T}{\partial a_i} \frac{q_{0i}}{T} \geq 0. \quad (3.62)$$

Неравенство (3.62) является формулировкой второго закона термодинамики для сплошной среды с памятью.

Для получения определяющих уравнений, базирующихся на рассмотрении сред скоростного типа, к числу реактивных переменных добавляют, например, скорость изменения тензора деформации Грина, скорость изменения абсолютной температуры и т. д. Тогда

$$\begin{aligned} A &= A \left( L_{kl}, \frac{dL_{kl}}{dt}, T, \frac{dT}{dt}, \vartheta_k, \dots \right), \\ h &= h \left( L_{kl}, \frac{dL_{kl}}{dt}, T, \frac{dT}{dt}, \vartheta_k, \dots \right), \\ \tilde{T}_{ji} &= \tilde{T}_{ji} \left( L_{kl}, \frac{dL_{kl}}{dt}, T, \frac{dT}{dt}, \vartheta_k, \dots \right), \\ q_{0i} &= q_{0i} \left( L_{kl}, \frac{dL_{kl}}{dt}, T, \frac{dT}{dt}, \vartheta_k, \dots \right). \end{aligned} \quad (3.63)$$

В предельном случае, когда скорости  $dL_{kl}/dt$ ,  $dT/dt, \dots$  стремятся к нулю, определяющие уравнения принимают вид

$$A = A^0(L_{kl}, T, \vartheta_k, \dots), \quad h = h^0(L_{kl}, T, \vartheta_k, \dots), \\ \tilde{T}_{ji} = \tilde{T}_{ji}^0(L_{kl}, T, \vartheta_k, \dots), \quad q_{0i} = q_{0i}^0(L_{kl}, T, \vartheta_k, \dots).$$

Для отличных от нуля скоростей изменения переменных можно записать

$$A = A^0 + A^D, \quad h = h^0 + h^D, \quad \tilde{T}_{ji} = T_{ji}^0 + T_{ji}^D, \quad q_{0i} = q_{0i}^0 + q_{0i}^D,$$

где верхний индекс “ $D$ ” соответствует диссипативным величинам.

Для сред скоростного типа последовательность получения диссипативной функции, диссипативного неравенства и соотношений, связывающих активные и реактивные переменные, аналогична рассмотренной ранее. Особенности получения соответствующих соотношений при изучении конкретных моделей сплошной среды скоростного типа будут достаточно подробно рассмотрены ниже.

Три основных рассмотренных подхода к построению математических моделей в механике сплошной среды представляют большое разнообразие вариантов для моделирования при исследовании реальных процессов, протекающих в сплошной среде. Наиболее общий подход — модель среды с памятью — обеспечивает и наиболее широкие возможности. Основной недостаток этого подхода состоит в том, что за математическим формализмом не всегда ясно видна физическая суть изучаемых явлений.

Преимущество модели среды с внутренними параметрами состояния заключается прежде всего в том, что она дает возможность связать макроскопическое поведение сплошной среды с процессами, протекающими на микроуровне. Среды с внутренними параметрами состояния можно рассматривать как частный случай сред с памятью, поскольку они приводят к сходным интегральным зависимостям.

Можно показать, что среды скоростного типа также являются частным случаем сред с памятью. Для этого рассмотрим функциональное соотношение

$$\hat{\mathbf{Y}}(t) = \int_0^\infty \hat{\mathbf{K}}(s) \cdot \hat{\mathbf{X}}(t-s) ds. \quad (3.64)$$

Если допустить, что функция памяти  $\hat{\mathbf{K}}$  убывает очень быстро, то ее можно представить рядом

$$\hat{\mathbf{K}}(s) = \hat{\mathbf{K}}_0 \delta(s) + \hat{\mathbf{K}}_1 \frac{d}{ds} \delta(s) + \hat{\mathbf{K}}_2 \frac{d^2}{ds^2} \delta(s) + \dots,$$

где  $\delta(s)$  — дельта-функция Дирака, а коэффициенты  $\hat{\mathbf{K}}_\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{N}$ ) не зависят от  $s$ . Случай нулевой памяти следует отсюда, если учесть только первый член в разложении —  $\hat{\mathbf{K}}_0$ , а случай бесконечно короткой памяти — при учете  $\hat{\mathbf{K}}_0$  и  $\hat{\mathbf{K}}_1$ . Соответствующая аппроксимация функциональной

зависимости (3.64) имеет вид

$$\widehat{\mathbf{Y}}(t) = \widehat{\mathbf{K}}_0 \cdot \widehat{\mathbf{X}}(t) + \widehat{\mathbf{K}}_1 \cdot \frac{d}{dt} \widehat{\mathbf{X}}(t).$$

Последнее соотношение показывает, что среды скоростного типа можно рассматривать как среды с бесконечно короткой памятью. Главный недостаток моделей сред скоростного типа состоит в том, что они не позволяют учесть релаксационные процессы.

**3.8. Условия на поверхности сильного разрыва.** Одной из особенностей, представляющих интерес при решении задач механики сплошной среды, является возникновение в исследуемом теле поверхностей, на которых могут быть разрывны искомые функции или их производные. Если при переходе через такую поверхность разрывны только производные или по координатам, или по времени, то *разрыв* называют *слабым*. Если же разрывны искомые функции, то *разрыв* называют *сильным* или *ударной волной* — если сильный разрыв подвижен.

В общем случае условия на поверхности разрыва можно получить, исходя из законов сохранения, записанных в интегральной форме. Из замкнутой системы дифференциальных уравнений, описывающих некоторые явления в рамках используемой модели поведения сплошной среды, условия на поверхности разрыва не могут быть получены предельным переходом от непрерывных движений к разрывным. При рассмотрении конкретных задач с возникающими в процессе решения разрывами используют две формы записи законов сохранения и второго закона термодинамики: интегральную и дивергентную, которой соответствуют уравнения (3.6), (3.12), (3.36) и неравенство (3.44).

Законы сохранения, записанные в дивергентной форме, в общем случае имеют вид

$$L(\widehat{\mathbf{u}}) = \frac{\partial \widehat{\mathbf{P}}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \widehat{\mathbf{Q}} + \widehat{\mathbf{R}} = \mathbf{0}. \quad (3.65)$$

Здесь  $\widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{x}, t, \widehat{\mathbf{u}})$ ,  $\widehat{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}, t, \widehat{\mathbf{u}})$  — дважды непрерывно дифференцируемые тензорные функции аргументов  $\mathbf{x}$ ,  $t$  в области определения  $G \subset \mathbb{R}^3 \times \Theta$ , где  $\mathbb{R}^3$  — евклидово пространство, а  $\Theta$  — множество всегда положительных значений времени,  $t \in [0, \infty)$ , и искомой тензорной функции  $\widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$  — в некоторой заданной области. Заметим, что ранг тензорных функций  $\widehat{\mathbf{P}}$  и  $\widehat{\mathbf{R}}$  на единицу меньше ранга  $\widehat{\mathbf{Q}}$ .

Введем в области  $G$ , в которой рассматривается  $\widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ , произвольные гладкие тензорные “пробные функции”  $\widehat{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, t)$ , с рангом, равным рангу  $\widehat{\mathbf{P}}$  и  $\widehat{\mathbf{R}}$ , тождественно равные нулю вне и на границе некоторой подобласти  $H_0$  области  $G$ ,  $H_0 \subset \mathbb{R}^3 \times \Delta\Theta$ , где  $\Delta\Theta$  — множество значений времени  $t \in [t_1, t_2]$ , а  $t_1, t_2$  — некоторые фиксированные моменты времени. Тогда

$$\int_{H_0} \widehat{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, t) \cdot \dots \cdot L(\widehat{\mathbf{u}}) dV dt = 0.$$

Для гладких тензорных функций  $\hat{\mathbf{u}}$  теорема Остроградского–Гаусса дает

$$\begin{aligned} \int_{H_0} \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, t) \cdot \dots \cdot L(\hat{\mathbf{u}}) dV dt = \int_{H_0} \left( \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\mathbf{w}} \cdot \dots \cdot \hat{\mathbf{P}}) - \frac{\partial \hat{\mathbf{w}}}{\partial t} \cdot \dots \cdot \hat{\mathbf{P}} + \right. \\ \left. + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\hat{\mathbf{w}} \cdot \dots \cdot \hat{\mathbf{Q}}) - (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{w}}) \cdot \dots \cdot \hat{\mathbf{Q}} + \hat{\mathbf{w}} \cdot \dots \cdot \hat{\mathbf{R}} \right) dV dt = \\ \int_{\partial H_0} (\hat{\mathbf{w}} \cdot \dots \cdot \hat{\mathbf{P}} n_t + \hat{\mathbf{w}} \cdot \dots \cdot \hat{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{n}) dS dt - \\ - \int_{H_0} \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{w}}}{\partial t} \cdot \dots \cdot \hat{\mathbf{P}} + (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{w}}) \cdot \dots \cdot \hat{\mathbf{Q}} - \hat{\mathbf{w}} \cdot \dots \cdot \hat{\mathbf{R}} \right) dV dt, \quad (3.66) \end{aligned}$$

где  $\partial H_0$  — граница области  $H_0$ ,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к граничной поверхности  $S$  рассматриваемого тела,  $n_t$  — проекция вектора нормали  $\mathbf{n}_{H_0}$  ( $n_1, n_2, n_3, n_t$ ) к  $\partial H_0$  на ось времени. В силу равенства  $\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, t)$  нулю на  $\partial H_0$  получим

$$\int_{H_0} \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{w}}}{\partial t} \cdot \dots \cdot \hat{\mathbf{P}} + (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{w}}) \cdot \dots \cdot \hat{\mathbf{Q}} - \hat{\mathbf{w}} \cdot \dots \cdot \hat{\mathbf{R}} \right) dV dt = 0. \quad (3.67)$$

Обратно, если зависимость (3.67) справедлива для некоторой непрерывно дифференцируемой функции  $\hat{\mathbf{u}}$  и для всех допустимых пробных функций  $\hat{\mathbf{w}}$ , то, применяя к (3.67) еще раз теорему Остроградского–Гаусса, получаем

$$\int_{H_0} \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, t) \cdot \dots \cdot L(\hat{\mathbf{u}}) dV dt = 0,$$

откуда следует, что  $L(\hat{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}$ . Функцию  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$  называют *слабым решением*, если она кусочно-непрерывна и имеет кусочно-непрерывные первые производные, и если соотношение (3.67) выполняется для всех допустимых пробных функций  $\hat{\mathbf{w}}$  и для всех подобластей  $H_0 \subset G$ .

Пусть  $\varphi(\mathbf{x}, t) = 0$  — уравнение поверхности разрыва  $\Phi$  функции  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$  и ее производных, разделяющей область  $H_0$  на две части —  $H_0^{(1)}$  и  $H_0^{(2)}$ .

Тогда, с учетом соотношения (3.66), имеем

$$\begin{aligned} \int_{H_0} \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, t) \cdot \dots \cdot L(\hat{\mathbf{u}}) dV dt = \int_{H_0^{(1)}} \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, t) \cdot \dots \cdot L(\hat{\mathbf{u}}) dS dT + \\ + \int_{H_0^{(2)}} \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, t) \cdot \dots \cdot L(\hat{\mathbf{u}}) dS dT = \int_{\partial H_0^{(1)}} \hat{\mathbf{w}} \cdot \dots \cdot (\hat{\mathbf{P}} n_t + \hat{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{n}) dS dT - \\ - \int_{H_0^{(1)}} \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{w}}}{\partial t} \cdot \dots \cdot \hat{\mathbf{P}} + (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{w}}) \cdot \dots \cdot \hat{\mathbf{Q}} - \hat{\mathbf{w}} \cdot \dots \cdot \hat{\mathbf{R}} \right) dS dT + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\partial H_0^{(2)}} \widehat{\mathbf{w}} \cdot \dots \cdot (\widehat{\mathbf{P}} n_t + \widehat{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{n}) dS dT - \int_{H_0^{(2)}} \left( \frac{\partial \widehat{\mathbf{w}}}{\partial t} \cdot \dots \cdot \widehat{\mathbf{P}} + (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \widehat{\mathbf{w}}) \cdot \dots \cdot \widehat{\mathbf{Q}} - \right. \\
 & \quad \left. - \widehat{\mathbf{w}} \cdot \dots \cdot \widehat{\mathbf{R}} \right) dS dT + \int_{\Phi^{(1)}} \widehat{\mathbf{w}} \cdot \dots \cdot (\widehat{\mathbf{P}} n_t + \widehat{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{n}) dS dT + \\
 & + \int_{\Phi^{(2)}} \widehat{\mathbf{w}} \cdot \dots \cdot (\widehat{\mathbf{P}} n_t + \widehat{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{n}) dS dT = \int_{\Phi^{(1)}} \widehat{\mathbf{w}} \cdot \dots \cdot (\widehat{\mathbf{P}} n_t + \widehat{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{n}) dS dT + \\
 & \quad + \int_{\Phi^{(2)}} \widehat{\mathbf{w}} \cdot \dots \cdot (\widehat{\mathbf{P}} n_t + \widehat{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{n}) dS dT = 0,
 \end{aligned}$$

где  $\partial H_0 = \partial H_0^{(1)} \cup \partial H_0^{(2)}$ ,  $\Phi^{(1)}$  и  $\Phi^{(2)}$  — поверхности разрыва, ограничивающие области  $H_0^{(1)}$  и  $H_0^{(2)}$  соответственно, а уравнения этих поверхностей  $\varphi^{(1)}(\mathbf{x}, t) \equiv \varphi(\mathbf{x}, t)$  и  $\varphi^{(2)}(\mathbf{x}, t) \equiv \varphi(\mathbf{x}, t)$ . Поскольку  $n_t^{(1)} = -n_t^{(2)}$  и  $\mathbf{n}^{(1)} = -\mathbf{n}^{(2)}$ , где индексы 1 и 2 связаны с соответствующими поверхностями разрыва, то

$$\int_{\Phi} \widehat{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, t) \cdot \dots \cdot ([\widehat{\mathbf{P}}] n_t + [\widehat{\mathbf{Q}}] \cdot \mathbf{n}) dS dt = 0$$

и, следовательно, соотношение на поверхности разрыва будет иметь вид

$$\int_{\Phi} \widehat{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, t) \cdot \dots \cdot ([\widehat{\mathbf{P}}] n_t + [\widehat{\mathbf{Q}}] \cdot \mathbf{n}) dS dt = 0, \quad (3.68)$$

где  $[\widehat{\mathbf{P}}]$  и  $[\widehat{\mathbf{Q}}]$  — скачки функций  $\widehat{\mathbf{P}}$  и  $\widehat{\mathbf{Q}}$  при переходе через поверхность разрыва.

В дальнейшем всегда будем обозначать параметры движения сплошной среды на одной стороне поверхности  $\Phi$  индексом 1, а на другой — индексом 2. Выберем нумерацию сторон  $\Phi$  таким образом, чтобы направленные нормали соответствовало переходу со стороны 2 на сторону 1, т. е.

$$\begin{aligned}
 [\widehat{\mathbf{P}}] &= \widehat{\mathbf{P}}^{(1)} - \widehat{\mathbf{P}}^{(2)}, \\
 [\widehat{\mathbf{Q}}] &= \widehat{\mathbf{Q}}^{(1)} - \widehat{\mathbf{Q}}^{(2)}.
 \end{aligned}$$

Проиллюстрируем приведенные рассуждения. Вследствие движения поверхность разрыва  $\Phi$ , заданная уравнением  $\varphi(\mathbf{x}, t) = 0$ , в различные моменты времени  $t$  и  $t + \Delta t$  занимает различные положения  $\Phi$  и  $\Phi'$  (рис. 3.1).

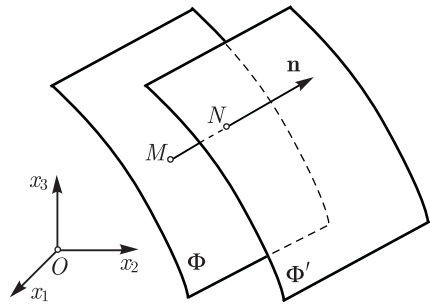


Рис. 3.1.

Выберем на  $\Phi$  в момент времени  $t$  некоторую точку  $M$  и предположим, что в этой точке однозначно определена нормаль к  $\Phi$ . Единичный вектор

нормали  $\mathbf{n}$  в пространстве  $\mathbb{R}^3$  в точке  $M$  к поверхности  $\Phi$  направим по вектору  $\overrightarrow{MN}$ , где точка  $N$  является точкой пересечения поверхности  $\Phi'$  с нормалью к  $\Phi$  в точке  $M$ . Знак функции  $\varphi(\mathbf{x})$  определим из условия  $\varphi(\mathbf{x}_M, t) = 0$ ,  $\varphi(\mathbf{x}_N, t) > 0$ , где  $\mathbf{x}_M, \mathbf{x}_N$  — радиусы-векторы точек  $M$  и  $N$  в момент времени  $t$ . Поэтому

$$\mathbf{n} = \frac{\text{grad } \varphi}{|\text{grad } \varphi|}.$$

Скоростью перемещения в пространстве поверхности  $\Phi$  в точке  $M$  называют вектор  $\mathbf{D}$ , нормальный к  $\Phi$  и определяемый как предел:

$$\mathbf{D} = \mathbf{n} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{MN}{\Delta t}. \quad (3.69)$$

Если уравнение поверхности разрыва задано, то вектор  $\mathbf{D}$  легко вычислить: обозначая через  $n_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{1}{|\text{grad } \varphi|}$  компоненты единичного вектора  $\mathbf{n}$ , можно записать

$$\varphi(\mathbf{x} + MN\mathbf{n}, t + \Delta t) = 0,$$

откуда с точностью до малых высшего порядка получим

$$MN \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} n_i + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Delta t = 0, \quad \text{или} \quad MN |\text{grad } \varphi| + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Delta t = 0.$$

Пользуясь последним равенством и следуя определению (3.69), находим

$$\mathbf{D} = - \frac{\partial \varphi / \partial t}{|\text{grad } \varphi|} \mathbf{n}. \quad (3.70)$$

Определим проекцию единичного вектора нормали к поверхности  $\Phi$  на ось времени:

$$n_t = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{1}{|\text{grad } \varphi|}.$$

Тогда, сравнивая последнее равенство и (3.70), получим

$$n_t = -D,$$

где  $D$  — модуль вектора  $\mathbf{D}$ , и условие (3.68) на поверхности разрыва примет вид

$$-D[\widehat{\mathbf{P}}] + [\widehat{\mathbf{Q}}] \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (3.71)$$

Если ввести вектор относительной скорости  $\mathbf{C} = \mathbf{v} - \mathbf{D}$ , где  $\mathbf{v}$  — вектор скорости движения частиц сплошной среды относительно выбранной неподвижной системы координат  $ox_1x_2x_3$ , то условие на поверхности разрыва примет вид

$$[\widehat{\mathbf{P}}](C - v) + [\widehat{\mathbf{Q}}] \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3.72)$$

где  $C = |\mathbf{C}|$ ,  $v = |\mathbf{v}| = v_i n_i$ .



Применим последнее равенство к законам сохранения и второму закону термодинамики. Если записать условие (3.71) для уравнения неразрывности (3.6), то с учетом (3.72) получим

$$[\rho](C - v_i n_i) + n_i[\rho v_i] = \rho^{(1)} C^{(1)} - \rho^{(2)} C^{(2)} - \\ - \rho^{(1)} v_i^{(1)} n_i + \rho^{(2)} v_i^{(2)} n_i + \rho^{(1)} v_i^{(1)} n_i - \rho^{(2)} v_i^{(2)} n_i = \rho^{(1)} C^{(1)} - \rho^{(2)} C^{(2)} = 0,$$

то есть

$$[\rho C] = 0. \quad (3.73)$$

Проделав аналогичные преобразования для условий на поверхности разрыва применительно к уравнениям законов сохранения количества движения (3.12) и энергии (3.36), получим, соответственно,

$$[\rho v_i C] + n_j[\sigma_{ji}] = 0, \quad (3.74)$$

$$[\rho e C] + n_j[-\sigma_{ji} v_i + q_j] = 0. \quad (3.75)$$

Условие на поверхности разрыва применительно к неравенству Клаузиуса–Дюгема (3.44) имеет вид

$$[\rho h C] + n_i[q_i/T] \geq 0. \quad (3.76)$$

Если рассматривать условия на поверхности разрыва в “собственной” системе координат, связанной с исследуемой точкой поверхности разрыва  $\Phi$ , в которой  $\mathbf{D} = 0$ , то выражения (3.73)–(3.76) примут вид

$$[\rho v] = 0, \\ n_j[\rho v_i v_j + \sigma_{ji}] = 0, \\ n_j[\rho e v_j - \sigma_{ji} v_i + q_j] = 0, \\ n_i[\rho h v_i + q_i/T] \geq 0. \quad (3.77)$$

Умножив второе равенство из (3.77) на  $n_i$ , с учетом первого равенства из (3.77) получим выражения для модулей векторов скоростей частиц до и после поверхности разрыва:

$$v^{(1)} = \sqrt{\frac{\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)} \rho^{(2)}}{\rho^{(2)} - \rho^{(1)} \rho^{(1)}}}, \quad v^{(2)} = \sqrt{\frac{\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)} \rho^{(1)}}{\rho^{(2)} - \rho^{(1)} \rho^{(2)}}}, \quad (3.78)$$

где  $\sigma = \sigma_{ji} n_i n_j$ . Отметим, что  $v^{(1)} = D$ .

Из третьего равенства (3.77) следует, что изменение внутренней энергии единицы массы сплошной среды при переходе через поверхность разрыва выражается условием

$$u^{(1)} - u^{(2)} = \frac{1}{2} (\sigma^{(2)} + \sigma^{(1)}) \left( \frac{1}{\rho^{(2)}} - \frac{1}{\rho^{(1)}} \right) + \frac{q^{(1)} - q^{(2)}}{m}, \quad (3.79)$$

которое получено с учетом соотношений (3.78) и  $m = (\rho v)^{(1)} = (\rho v)^{(2)}$ .

В том случае, когда передачей теплоты при рассмотрении условий на поверхности разрыва можно пренебречь,  $q_i = 0$ , соотношения (3.77)

переходят в *соотношения Гюгонио*. Соотношение (3.79) при  $q^{(1)} = q^{(2)} = 0$  носит название *адиабаты Гюгонио*.

Изложенный общий подход может быть применен к исследованию поверхностей разрыва, возникающих в случае использования тех или иных определяющих уравнений сплошной среды. В том случае, когда поведение исследуемой среды описывается линейными уравнениями, поверхности разрыва возникают только при разрывных краевых условиях.

## 4. ЛИНЕЙНАЯ ТЕРМОУПРУГАЯ СПЛОШНАЯ СРЕДА

**4.1. Классическая термоупругость.** Рассмотрим деформируемое твердое тело — сплошную среду, имеющую хотя бы одно естественное состояние, занимающее объем  $V$  и ограниченное поверхностью  $S$ . Под действием тепловых и механических нагрузок в теле возникают деформации и напряжения, изменяется температура. При отклонении температуры  $T(\mathbf{x}, t)$  от температуры  $T_0 = \text{const}$  естественного состояния в теле возникают температурные деформации, определяемые тензором температурной деформации  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(T)}$  с компонентами  $\varepsilon_{ij}^{(T)}$ . Будем полагать, что связь между компонентами тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ , компонентами тензоров деформации  $\varepsilon_{ij}$  и температурной деформацией  $\varepsilon_{ij}^{(T)}$  линейна. Положим также, что  $\|\partial u_i / \partial x_j\| \ll 1$ ,  $\|\varepsilon_{ij}^{(T)}\| \ll 1$  и лагранжев и эйлеров способы описания движения сплошной среды эквивалентны, поэтому  $(\dot{\cdot}) = d(\cdot)/dt \equiv \partial(\cdot)/\partial t$ . В этом случае вектор перемещения можно рассматривать как векторное поле, тензор деформации — как тензорное поле, определенные в действительном векторном пространстве. Компоненты тензора деформации связаны при этом с компонентами вектора перемещения соотношениями Коши (2.22), а плотность среды неизменна, т.е.  $\rho = \rho_0$ . Такую сплошную среду называют линейной термоупругой сплошной средой.

Для получения линеаризованных уравнений классической термоупругости представим объемную плотность свободной энергии в виде суммы

$$\rho A(\varepsilon_{kl}, T) = \rho A^*(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}) + \rho B(T) - \rho A^*(-\varepsilon_{kl}^{(T)}), \quad (4.1)$$

учитывающей третье равенство из (3.51). Здесь  $\rho A^*(\cdot)$  — часть свободной энергии, зависящая только от  $\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(T)}$  или  $\varepsilon_{ij}^{(T)}$ . Если  $\varepsilon_{ij} = 0$ , то  $\rho A(\varepsilon_{kl}, T) = \rho B(T)$ , а при  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(T)}$  объемная плотность свободной энергии зависит только от температуры:  $\rho A(\varepsilon_{kl}, T) = \rho B(T) - \rho A^*(-\varepsilon_{kl}^{(T)})$ . В исходной конфигурации  $A(0, T_0) = 0$ . Такое выражение объемной плотности свободной энергии дает возможность рассматривать не только малые отклонения абсолютной температуры от начальной, но и достаточно большие, однако при сохранении малости температурной деформации. Функция температуры  $B(T)$  равна нулю при температуре  $T_0$  естественного состояния. Она определяет изменение свободной энергии только вследствие изменения абсолютной температуры.

Предположение о малости полной и температурной деформаций позволяет представить первое и третье слагаемые в выражении (4.1) в виде ряда Тейлора по соответствующим аргументам и ограничиться при разложении

квадратичными слагаемыми:

$$\begin{aligned} \rho A(\varepsilon_{kl}, T) &= \rho A^*(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}) + \rho B(T) - \rho A^*(-\varepsilon_{kl}^{(T)}) = \\ &= \rho \frac{\partial A^*(0)}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \rho \frac{\partial^2 A^*(0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(T)}) (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}) + \\ &\quad + B(T) - \frac{1}{2} \rho \frac{\partial^2 A^*(0)}{\partial \varepsilon_{ij}^{(T)} \partial \varepsilon_{kl}^{(T)}} (-\varepsilon_{ij}^{(T)}) (-\varepsilon_{kl}^{(T)}) = \\ &= D_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}) (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(T)}) + \rho B(T) - \frac{1}{2} C_{ijkl} (-\varepsilon_{ij}^{(T)}) (-\varepsilon_{kl}^{(T)}), \end{aligned}$$

где  $C_{ijkl}$  — компоненты тензора  $\widehat{C}$  коэффициентов упругости.

Поскольку компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  связаны с компонентами тензора деформации  $\varepsilon_{ij}$  равенством  $\sigma_{ij} = \rho \partial A / \partial \varepsilon_{ij}$  (см. (2.51)), очевидно, что  $D_{ij} \equiv 0$ , и при квадратичном приближении  $\rho A^*(\cdot)$  имеем

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}), \quad \text{или} \quad \widehat{\sigma} = \widehat{C} \cdot (\widehat{\varepsilon} - \widehat{\varepsilon}^{(T)}). \quad (4.2)$$

Соотношения (4.2) называют *законом Дюамеля–Неймана для анизотропного упругого твердого тела*. Компоненты  $C_{ijkl}$  тензора  $\widehat{C}$  зависят от ориентации осей выбранной системы координат.

Тензор  $\widehat{C}$  содержит 81 компонент. Однако поскольку тензоры  $\widehat{\sigma}$  и  $\widehat{\varepsilon}$  симметричны,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  и  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ , то число независимых компонентов тензора коэффициентов упругости сокращается до 36. Если далее учесть очевидные равенства  $\partial^2 A / (\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}) = \partial^2 A / (\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij})$ , то  $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$  и число независимых компонентов тензора  $\widehat{C}$  составит 21.

Тензор коэффициентов упругости обладает центральной симметрией: при смене направления осей координат (инверсии) компоненты тензора  $\widehat{C}$  не изменяются:

$$C_{mnpq} = C_{ijkl} \alpha_{im} \alpha_{jn} \alpha_{kp} \alpha_{lq} = C_{ijkl},$$

поскольку  $\alpha_{im} = \alpha_{jn} = \alpha_{kp} = \alpha_{lq} = -1$ .

Если из 21 компонента тензора коэффициентов упругости отличны от нуля только 9, а именно:  $C_{1111}$ ,  $C_{2222}$ ,  $C_{3333}$ ,  $C_{1122}$ ,  $C_{1133}$ ,  $C_{2233}$ ,  $C_{2323}$ ,  $C_{3131}$ ,  $C_{1212}$ , то такую сплошную среду называют *ортотропной*.

Упругое ортотропное тело, компоненты тензора коэффициентов упругости которого удовлетворяют равенствам  $C_{1111} = C_{2222} = C_{3333}$ ,  $C_{1122} = C_{1133} = C_{2233}$  и  $C_{2323} = C_{3131} = C_{1212} = \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122})$ , называют *изотропным* и используют следующие обозначения:  $\lambda = C_{1122}$ ,  $\mu = \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122})$  — *коэффициенты Ламе*. Очевидно, что для изотропного тела

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Выражение для  $h$  — массовой плотности энтропии — получим из второго равенства (3.51) с учетом представления объемной плотности свободной энергии (4.1):

$$h = -\frac{\partial A}{\partial T} = \frac{1}{\rho} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{(T)}}{\partial T} - \frac{\partial B}{\partial T}, \quad \text{или} \quad h = \frac{1}{\rho} \widehat{\mathbf{C}} \cdot \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \frac{\partial \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(T)}}{\partial T} - \frac{\partial B}{\partial T}. \quad (4.3)$$

При температуре  $T_0$  естественного состояния и  $\varepsilon_{ij} = 0$  массовая плотность энтропии  $h(0, T_0) = 0$  и, следовательно,  $\partial B / \partial T = 0$ .

С учетом (4.1) и (4.3) диссипативная функция из (3.46) для рассматриваемой среды примет вид

$$\delta = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho \left( \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial A}{\partial T} \dot{T} + h \dot{T} \right) = 0, \quad (4.4)$$

поскольку должны выполняться первые два равенства из (3.51).

Подставив (4.3) и (4.4) в закон сохранения энергии (3.46), получим уравнение теплопроводности:

$$-\rho T \frac{\partial^2 B}{\partial T^2} \dot{T} + T C_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)} \dot{\varepsilon}_{ij} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho r,$$

или

$$-\rho T \frac{\partial^2 B}{\partial T^2} \dot{T} + T \widehat{\mathbf{C}} \cdot \widehat{\boldsymbol{\alpha}}^{(T)} \cdot \dot{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}} = -\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q} + \rho r, \quad (4.5)$$

в котором принята линейная зависимость тензора температурной деформации  $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(T)}$  от температуры, а  $\alpha_{kl}^{(T)} = \partial \varepsilon_{kl}^{(T)} / \partial T$  — компоненты *тензора температурных коэффициентов линейного расширения*  $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}^{(T)}$ .

В дальнейшем необходимо конкретизировать выражения для компонентов вектора плотности теплового потока — четвертое соотношение из (3.48), — приняв его, в соответствии с принципом равноприсутствия, в виде линейной функции реактивных переменных  $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ,  $T$  и  $\boldsymbol{\vartheta}$ :

$$q_i = \beta_{ijk} \varepsilon_{jk} + \gamma_i (T - T_0) - \lambda_{ij}^{(T)} \vartheta_j + g_i,$$

где  $\beta_{ijk}$ ,  $\lambda_{ij}^{(T)}$ ,  $\gamma_i$  и  $g_i$  — компоненты тензоров соответственно третьего, второго и первого рангов. В силу неравенства (3.47) при  $\delta = 0$  эти тензоры должны быть выбраны таким образом, чтобы условие

$$-\beta_{ijk} \varepsilon_{jk} \vartheta_i - \gamma_i (T - T_0) \vartheta_i + \lambda_{ij}^{(T)} \vartheta_j \vartheta_i - g_i \vartheta_i \geq 0$$

выполнялось для произвольных значений реактивных переменных.

Достаточное условие справедливости последнего неравенства состоит в том, что тензоры с компонентами  $\beta_{ijk}$ ,  $\gamma_i$  и  $g_i$  должны быть тождественно равны нулю, а тензор с компонентами  $\lambda_{ij}^{(T)}$  должен быть неотрицательно определен.

Соотношение, связывающее компоненты вектора плотности теплового потока с компонентами градиента температуры называют *законом теплопроводности Фурье*:

$$q_i = -\lambda_{ij}^{(T)} \vartheta_j, \quad \text{или} \quad \mathbf{q} = -\widehat{\boldsymbol{\lambda}}^{(T)} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} T, \quad (4.6)$$

где  $\lambda_{ij}^{(T)}$  — компоненты *тензора теплопроводности*  $\widehat{\boldsymbol{\lambda}}^{(T)}$ ; для изотропной сплошной среды  $\lambda_{ij}^{(T)} = \lambda^{(T)} \delta_{ij}$ ,  $\lambda^{(T)}$  — *теплопроводность*.

Для рассматриваемой термоупругой среды диссипативное неравенство (3.47) с учетом закона теплопроводности Фурье (4.6) приобретает вид

$$\lambda_{ij}^{(T)} \vartheta_j \vartheta_i \geq 0, \quad \text{или} \quad (\nabla_{\mathbf{x}} T)^T \cdot \widehat{\boldsymbol{\lambda}}^{(T)} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} T \geq 0, \quad (4.7)$$

откуда следует, что компоненты тензора теплопроводности являются элементами симметрической и неотрицательно определенной матрицы.

Подставив (4.6) в уравнение (4.5), получим иную форму записи уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned} \rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} &= -T C_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \rho r, \quad \text{или} \\ \rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} &= -T \widehat{\mathbf{C}} \cdot \widehat{\boldsymbol{\alpha}}^{(T)} \cdot \frac{\partial \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left( \widehat{\boldsymbol{\lambda}}^{(T)} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} T \right) + \rho r, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где  $c_\varepsilon = -T \partial^2 B / \partial T^2$  — *удельная массовая теплоемкость при постоянной деформации*.

Это уравнение описывает нестационарное распределение температуры в термоупругой среде с учетом *связанности полей температуры и деформации*, выражающейся в наличии первого слагаемого в правой части уравнения (4.8).

Из закона Дюамеля–Неймана (4.2) выразим деформацию через напряжения:

$$\varepsilon_{ij} = B_{ijkl} \sigma_{kl} + \varepsilon_{ij}^{(T)}, \quad \text{или} \quad \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \widehat{\mathbf{B}} \cdot \widehat{\boldsymbol{\sigma}} + \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(T)}, \quad (4.9)$$

где  $B_{ijkl}$  — компоненты тензора четвертого ранга — *тензора коэффициентов податливости*  $\widehat{\mathbf{B}}$ ,  $\widehat{\mathbf{B}} = \widehat{\mathbf{C}}^{-1}$ . Подставив затем (4.9) в уравнение (4.8), получим иную форму записи уравнения теплопроводности:

$$\rho c_\sigma \frac{\partial T}{\partial t} = -T \alpha_{ij}^{(T)} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \rho r,$$

или

$$\rho c_\sigma \frac{\partial T}{\partial t} = -T \widehat{\boldsymbol{\alpha}}^{(T)} \cdot \frac{\partial \widehat{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left( \widehat{\boldsymbol{\lambda}}^{(T)} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} T \right) + \rho r, \quad (4.10)$$

где  $c_\sigma = c_\varepsilon + T C_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)} \alpha_{ij}^{(T)} / \rho$  — *удельная массовая теплоемкость при постоянных напряжениях*, которую, как правило, и определяют в теплофизических экспериментах. Для изотропной среды  $\alpha_{ij}^{(T)} = \alpha^{(T)} \delta_{ij}$  ( $\alpha^{(T)}$  —

температурный коэффициент линейного расширения) и

$$c_\sigma = c_\varepsilon + 3T(3\lambda + 2\mu)(\alpha^{(T)})^2.$$

Если подставить соотношения (4.2) с учетом (2.22) или (2.23) в уравнение закона сохранения количества движения (3.11), то получим систему из трех дифференциальных уравнений в частных производных относительно компонентов вектора перемещения  $u_i$  и абсолютной температуры  $T$ :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( C_{ijkl} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \varepsilon_{kl}^{(T)} \right) \right) + \rho b_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (4.11)$$

которые называют *уравнениями Ламе*.

Для изотропной и однородной упругой среды уравнения (4.11) принимают вид

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \rho b_i - (3\lambda + 2\mu)\alpha^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},$$

или

$$\mu \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{u} \nabla_{\mathbf{x}}) + (\lambda + \mu) \nabla_{\mathbf{x}} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{b} - (3\lambda + 2\mu)\alpha^{(T)} \nabla_{\mathbf{x}} T = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (4.12)$$

Для получения единственного решения системы дифференциальных уравнений (4.8) (или (4.10)) и (4.12) необходимо задать граничные и начальные условия.

Уравнения теплопроводности (4.8) (или (4.10)) и закон сохранения количества движения (4.11) (или (4.12)) образуют замкнутую систему уравнений классической термоупругости, которые вместе с граничными и начальными условиями для заданной области составляют формулировку краевой задачи.

Граничные условия на поверхности  $S$  обычно принимают следующими:

$$\begin{aligned} p_{ij} n_j &= p_i(M, t), \quad \text{или} \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p}(M, t), \quad M \in S_\sigma \subset S; \\ u_i &= \tilde{u}_i(M, t), \quad \text{или} \quad \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}(M, t), \quad M \in S_u = S \setminus S_\sigma; \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$-\lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j} n_i = \tilde{q}(M, t), \quad \text{или}$$

$$-\mathbf{n}^T \cdot \hat{\boldsymbol{\lambda}}^{(T)} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} T = \tilde{q}(M, t), \quad M \in S_q \subset S;$$

$$-\lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j} n_i = \alpha(M, t) (T^*(M, t) - T(M, t)), \quad \text{или} \quad (4.14)$$

$$-\mathbf{n}^T \cdot \hat{\boldsymbol{\lambda}}^{(T)} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} T = \alpha(M, t) (T^*(M, t) - T(M, t)),$$

$$M \in S_\alpha = S \setminus S_q,$$

где  $p_i(M, t)$ ,  $\tilde{u}_i(M, t)$  — компоненты заданных поверхностных сил  $\mathbf{p}(M, t)$  и перемещения  $\tilde{\mathbf{u}}(M, t)$ ;  $\tilde{q}(M, t)$  — заданная величина плотности теплового потока на поверхности;  $\alpha(M, t)$ ,  $T^*(M, t)$  — коэффициент теплоотдачи и температура окружающей среды;  $\mathbf{n}$  — вектор единичной внешней

нормали к поверхности  $S$ . Отметим, что последнее граничное условие называют условием теплообмена по закону Ньютона. Граничные условия (4.14) в теории теплопроводности называют *граничными условиями второго и третьего рода* соответственно.

Еще один возможный вариант граничных условий для уравнения теплопроводности следует из второго соотношения (4.14) при  $\alpha(M, t) \rightarrow \infty$  ( $\lambda_{ij}^{(T)}/\alpha \rightarrow 0$ ) — задание температуры  $T^*(M, t)$  на всей граничной поверхности или ее части:

$$T(M, t) = T^*(M, t), \quad M \in S_T = S \setminus (S_q \cup S_\alpha). \quad (4.15)$$

Условие (4.15) называют *граничным условием первого рода*.

Начальные условия, которые обычно используют в классической термоупругости, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u_i(M, 0) &= u_i^{(0)}(M), \quad M \in V; \\ \dot{u}_i(M, 0) &= \dot{u}_i^{(0)}(M), \quad M \in V; \\ T(M, 0) &= T^{(0)}(M), \quad M \in V, \end{aligned} \quad (4.16)$$

где  $u_i^{(0)}$ ,  $\dot{u}_i^{(0)}$ ,  $T^{(0)}$  — известные в начальный момент времени  $t = 0$  значения компонентов вектора перемещения, скорости изменения компонентов этого вектора и известное распределение температуры.

Далее рассмотрим применение изложенного в п. 3.8 общего подхода к исследованию условий на поверхности разрыва в однородной среде к уравнениям связанной теории термоупругости. Предполагая, что возмущения в рассматриваемой среде распространяются со скоростью  $\mathbf{D}$ , из закона сохранения количества движения (3.11) в случае малых деформаций используя соотношение (3.71), получаем

$$-\rho[\dot{u}_i]D - n_j[\sigma_{ij}] = 0, \quad (4.17)$$

а соотношения Коши позволяют записать связь между величинами скачков компонентов тензора деформации и вектора перемещения:

$$-[\varepsilon_{ij}]D = \frac{1}{2}([\dot{u}_i]n_j + [\dot{u}_j]n_i), \quad (4.18)$$

которая соответствует *условию Адамара*. Поскольку правая часть (4.18) отлична от нуля только при  $i = j$ , то при переходе через поверхность разрыва непрерывны сдвиговые деформации.

Для закона сохранения энергии в форме уравнения теплопроводности (4.8) условие на поверхности разрыва будет иметь вид

$$\rho c_\varepsilon[T]D = -T_0 C_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)} [\varepsilon_{ij}]D + [q_j]n_j, \quad (4.19)$$

где коэффициенты приняты постоянными в предположении, что отклонение температуры от начальной  $T_0$  невелико.



Наконец, для компонентов вектора плотности теплового потока из закона Фурье и закона Дюамеля–Неймана можно записать

$$\lambda_{ij}^{(T)} [T] n_j = 0, \quad [\sigma_{ij}] D = C_{ijkl} [\varepsilon_{kl}] - \alpha_{kl}^{(T)} [T] D. \quad (4.20)$$

Как следует из первого соотношения (4.20), температура непрерывна,  $[T] = 0$ , т. е. скорость распространения теплоты в данном случае бесконечна.

Комбинируя далее выражения (4.17), (4.20) и (4.18), получим

$$\rho [\dot{u}_i] D^2 - C_{ijkl} [\dot{u}_k] n_l n_j = 0,$$

а поскольку в общем случае  $[\dot{u}_i] \neq 0$ , скорость распространения упругих возмущений определим из условия

$$\det(\rho D^2 \delta_{ik} - C_{ijkl} n_l n_j) = 0. \quad (4.21)$$

В частном случае изотропной среды из соотношения (4.21) следуют выражения для скоростей распространения продольных и поперечных волн в термоупругой среде:

$$D_{\sigma_1} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad D_{\sigma_2} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (4.22)$$

Если из решения краевой задачи теории термоупругости с заданными начальными и граничными условиями определены  $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ ,  $T(x_1, x_2, x_3, t)$ ,  $\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3, t)$  и  $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3, t)$  и, следовательно, определена величина скачка какой-либо из этих функций, то значения скачков других функций на фронте термоупругой волны находятся с помощью соотношений (4.17)–(4.20).

Если в уравнениях (4.12) можно пренебречь инерционными слагаемыми  $|\rho \partial^2 u_i / \partial t^2| \approx 0$ , то уравнения закона сохранения количества движения (уравнения движения) переходят в уравнения равновесия в перемещениях:

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} - (3\lambda + 2\mu) \alpha^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \rho b_i = 0,$$

или

$$\mu \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{u} \nabla_{\mathbf{x}}) + (\lambda + \mu) \nabla_{\mathbf{x}} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}) - (3\lambda + 2\mu) \alpha^{(T)} \nabla_{\mathbf{x}} T + \rho \mathbf{b} = 0. \quad (4.23)$$

Уравнения (4.23) и (4.8) (или (4.18)) вместе с граничными условиями (4.13), (4.14) и (4.15) и первым и третьим равенствами из (4.16) образуют квазистатическую задачу связанной термоупругости.

**4.2. Теория температурных напряжений.** Рассмотрим произвольный элементарный объем  $dV$  линейно упругой среды, ограниченный поверхностью  $dS$ , в котором протекает *адиабатический процесс* — такой процесс, при котором рассматриваемая термодинамическая система (объем  $dV$ ) не обменивается теплотой с окружающей средой, т. е.  $q_i = 0$  на поверхности  $dS$ . В этом случае из уравнения (4.8) при  $r = 0$  следует связь

между деформацией и температурой:

$$\ln \frac{T}{T_0} = -C_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)} \varepsilon_{ij} \frac{1}{\rho c_\varepsilon}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3,$$

которая для изотропной среды принимает вид

$$\ln \frac{T}{T_0} = -(3\lambda + 2\mu) \alpha^{(T)} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{1}{\rho c_\varepsilon}.$$

Если принять, что  $|T - T_0|/T_0 \ll 1$ , то из последнего равенства получим

$$T - T_0 = -(3\lambda + 2\mu) \alpha^{(T)} T_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{1}{\rho c_\varepsilon}, \quad (4.24)$$

т. е. в адиабатическом процессе, протекающем в элементарном объеме  $dV$ , отклонение температуры от начальной пропорционально относительному изменению  $\partial u_i / \partial x_i$  этого объема. Отметим, что рассмотренный процесс является еще и *изоэнтропическим (изоэнтропийным)*, так как в нем энтропия не меняется.

Оценим влияние эффекта связанности полей температуры и деформации в уравнении (4.8) на процесс теплопроводности. Положим в уравнениях (4.23)  $b_i = 0$  и вычислим дивергенцию левой части этих уравнений:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) - (3\lambda + 2\mu) \alpha^{(T)} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} = \\ = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \left( (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - (3\lambda + 2\mu) \alpha^{(T)} (T - T_0) \right) = 0, \end{aligned}$$

или

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \left( (\lambda + 2\mu) \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} - (3\lambda + 2\mu) \alpha^{(T)} (T - T_0) \right) = 0,$$

а затем, после двукратного интегрирования, получим

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{(3\lambda + 2\mu) \alpha^{(T)}}{\lambda + 2\mu} (T - T_0) + \varphi(\mathbf{x}), \quad (4.25)$$

где  $\varphi(\mathbf{x})$  — гармоническая функция.

После подстановки соотношения (4.25) в уравнение теплопроводности (4.8) для изотропного и однородного тела оно принимает вид

$$\left( 1 + \delta_T \right) \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{r}{c_\varepsilon},$$

где  $a = \lambda / (\rho c_\varepsilon)$  — *температуропроводность* (коэффициент температуропроводности),  $\delta_T = ((3\lambda + 2\mu) \alpha^{(T)})^2 / ((\lambda + 2\mu) \rho c_\varepsilon)$  — *параметр термоупругой связанности*, учитывающий влияние изменения деформации на изменение температуры в окрестности рассматриваемой точки. Для большинства материалов  $\delta_T \ll 1$  (для алюминия  $\delta_T = 0,0378$ , железа —

0,0098, свинца — 0,0639, но для полимерных материалов этот параметр существенно больше, например, для поливинилбутираля  $\delta_T = 0,431$ ) и в практически важных случаях связанность полей температуры и деформации не учитывают, т. е. решают задачи *теории температурных напряжений*.

Этой теории соответствуют в общем случае уравнения движения (4.11), (4.12) или равновесия (4.23), уравнение теплопроводности (4.8) (или (4.10)) без первых слагаемых в правой части и краевые условия (4.13)–(4.16). Отметим, что в теории упругих температурных напряжений полагают  $c_\varepsilon = c_\sigma$ .

Поскольку шесть компонентов  $\varepsilon_{ij}$  тензора деформации удовлетворяют условиям совместности (2.34), то очевидно, что эти условия можно выразить через шесть компонентов  $\sigma_{ij}$  тензора напряжений. Для этого рассмотрим изотропную однородную упругую среду, для которой равенства (3.10) принимают вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left( \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) + \varepsilon^{(T)} \delta_{ij},$$

или

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2\mu} \left( \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} I_{1\sigma} \hat{\mathbf{I}} \right) + \boldsymbol{\varepsilon}^{(T)} \hat{\mathbf{I}}, \quad (4.26)$$

где  $I_{1\sigma}$  — первый инвариант тензора напряжений,  $\hat{\mathbf{I}}$  — единичный тензор с компонентами  $\delta_{ij}$ .

Соотношения (4.26) обычно применяют с использованием обозначений  $E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$  и  $\nu = 0,5\lambda/(\lambda + \mu)$ , где  $E$  — *модуль упругости*, а  $\nu$  — *коэффициент Пуассона*, т. е.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \varepsilon^{(T)} \delta_{ij}. \quad (4.27)$$

Подставив соотношения (4.27) в условия совместности деформаций (2.34) и положив  $k = m$ , получим

$$(1 + \nu) \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_m \partial x_m} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_m \partial x_m} \delta_{ij} + E \frac{\partial^2 \varepsilon^{(T)}}{\partial x_m \partial x_m} \delta_{ij} + \frac{\partial^2 \sigma_{mm}}{\partial x_i \partial x_j} + E \frac{\partial^2 \varepsilon^{(T)}}{\partial x_i \partial x_j} + \rho(1 + \nu) \left( \frac{\partial b_i}{\partial x_j} + \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \right) = 0, \quad (4.28)$$

где учтены равенства

$$\frac{\partial^2 \sigma_{im}}{\partial x_j \partial x_m} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \sigma_{im}}{\partial x_m} \right) = -\rho \frac{\partial b_i}{\partial x_j}$$

и

$$\frac{\partial^2 \sigma_{jm}}{\partial x_i \partial x_m} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \sigma_{jm}}{\partial x_m} \right) = -\rho \frac{\partial b_j}{\partial x_i},$$

следующие из уравнений равновесия.

При  $j = i$  из равенства (4.28) находим

$$(1 - \nu) \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_i \partial x_i} + \rho(1 + \nu) \frac{\partial b_i}{\partial x_i} + 2E \frac{\partial^2 \varepsilon^{(T)}}{\partial x_i \partial x_i} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_i \partial x_i} = -\rho \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} - \frac{2E}{1 - \nu} \frac{\partial^2 \varepsilon^{(T)}}{\partial x_i \partial x_i}.$$

Подставляя далее последнее равенство в уравнения (4.28), получаем

$$(1 + \nu) \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_i \partial x_j} + \rho \nu \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\partial b_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \\ + \rho(1 - \nu) \left( \frac{\partial b_i}{\partial x_j} + \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \right) + E \left( \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\partial^2 \varepsilon^{(T)}}{\partial x_k \partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial^2 \varepsilon^{(T)}}{\partial x_i \partial x_j} \right) = 0,$$

или

$$(1 + \nu) \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \hat{\boldsymbol{\sigma}}) + \nabla_{\mathbf{x}} (\nabla_{\mathbf{x}} I_{1\sigma}) + \rho \nu \frac{1 + \nu}{1 - \nu} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{b}) \hat{\mathbf{I}} + \rho(1 - \nu) (\mathbf{b} \nabla_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{b}) + \\ + E \left( \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \hat{\mathbf{I}} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \varepsilon^{(T)}) + \nabla_{\mathbf{x}} (\nabla_{\mathbf{x}} \varepsilon^{(T)}) \right) = 0, \quad (4.29)$$

— уравнения Бельтрами–Мичелла.

В такой постановке задача теории температурных напряжений сведена к нахождению шести компонентов тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ , удовлетворяющих граничным условиям (4.13). Зная компоненты тензора напряжений, из соотношений (4.26) или (4.27) определяем компоненты тензора деформации, а затем и компоненты вектора перемещения.

Далее рассмотрим *плоскую задачу* теории упругих температурных напряжений, которой соответствуют или задание в виде линейной функции одного из компонентов вектора перемещения, например,  $u_3(x_1, x_2, x_3) = u_3^{(0)} + \varepsilon_{33}^{(0)} x_3$ ,  $u_3^{(0)} = \text{const}$ ,  $\varepsilon_{33}^{(0)} = \text{const}$  и  $u_1(x_1, x_2) \neq 0$ ,  $u_2(x_1, x_2) \neq 0$ , или трех компонентов тензора напряжений, например,  $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$  и  $\sigma_{11}(x_1, x_2) \neq 0$ ,  $\sigma_{22}(x_1, x_2) \neq 0$ ,  $\sigma_{12}(x_1, x_2) \neq 0$ . В первом случае из соотношений Коши следует, что  $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}^{(0)}$  и  $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$ . Тогда из равенств (4.27) получим

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E_1} (\sigma_{11} - \nu_1 \sigma_{22}) + \tilde{\varepsilon}^{(T)} - \tilde{\varepsilon}_{33}^{(0)}, \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E_1} (\sigma_{22} - \nu_1 \sigma_{11}) + \tilde{\varepsilon}^{(T)} - \tilde{\varepsilon}_{33}^{(0)}, \quad (4.30)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1 + \nu_1}{E_1} \sigma_{12}, \quad \sigma_{33} = \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + (\varepsilon_{33}^{(0)} - \varepsilon^{(T)}) E,$$

где  $E_1 = E/(1 - \nu^2)$ ,  $\nu_1 = \nu/(1 - \nu)$ ,  $\tilde{\varepsilon}^{(T)} = (1 + \nu)\varepsilon^{(T)}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{33}^{(0)} = \nu\varepsilon_{33}^{(0)}$ .

Отметим, что равенства (4.30) соответствуют *плоскому деформированному состоянию*, которое реализуется в длинном цилиндрическом теле. Если же высота цилиндра стремится к нулю, в рассматриваемом теле реализуется второй случай, соответствующий *плоскому напряженному состоянию*, при котором

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) + \varepsilon^{(T)}, & \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) + \varepsilon^{(T)}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12}, & \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \varepsilon^{(T)}.\end{aligned}\quad (4.31)$$

Два эти случая объединяют общим названием *задачи о плоском напряженно-деформированном состоянии*, в ходе решения которой определяют восемь функций:  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{12}$ ,  $u_1$  и  $u_2$ . При отсутствии массовых сил эти функции должны удовлетворять двум уравнениям равновесия:

$$\frac{\partial\sigma_{rs}}{\partial x_r} = 0, \quad r, s = 1, 2, \quad (4.32)$$

трем соотношениям между компонентами тензоров деформации и напряжений (4.30) или (4.31) и трем соотношениям между компонентами тензора деформации и вектора перемещения:

$$\varepsilon_{rs} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \frac{\partial u_s}{\partial x_r} \right), \quad r, s = 1, 2.$$

Граничные условия на границе области задают в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{rs}n_s &= p_r(M), & M &\in S_\sigma, & S_\sigma &\subset S; \\ u_r &= \tilde{u}_r(M), & M &\in S_u = S \setminus S_\sigma.\end{aligned}\quad (4.33)$$

Для плоской задачи рассматриваемое тело представляет собой двумерную область, а граница для односвязной области — замкнутую кривую.

Из шести уравнений совместности деформаций отлично от тождественного нуля только одно:

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x_1\partial x_2} = 0.$$

Подставив в это уравнение соотношения (4.30) (или (4.31)), с учетом уравнений (4.32) получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x_r\partial x_r}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + E_1\frac{\partial^2\varepsilon^{(T)}}{\partial x_r\partial x_r} = 0. \quad (4.34)$$

Введем функцию  $F = F(x_1, x_2)$  такую, что

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_2}. \quad (4.35)$$

Очевидно, что уравнения равновесия (4.32) при этом удовлетворяются тождественно. Подставив выражение (4.35) в уравнение (4.34), получим

бигармоническое уравнение относительно функции  $F$ , которую называют *функцией напряжений* (функцией Эри):

$$\frac{\partial^2}{\partial x_s \partial x_s} \frac{\partial^2 F}{\partial x_r \partial x_r} + E_1 \frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}^{(T)}}{\partial x_r \partial x_r} = 0.$$

Отметим, что при  $\tilde{\varepsilon}^{(T)} = \tilde{\alpha}^{(T)}(T - T_0)$ , где  $\tilde{\alpha}^{(T)} = (1 + \nu)\alpha^{(T)}$ , последнее уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x_s \partial x_s} \frac{\partial^2 F}{\partial x_r \partial x_r} + E_1 \tilde{\alpha}^{(T)} \frac{\partial^2 T}{\partial x_r \partial x_r} = 0. \quad (4.36)$$

Если распределение температуры в рассматриваемой области описывается двумерным уравнением нестационарной теплопроводности,  $T = T(x_1, x_2, t)$ , то

$$\frac{\partial^2}{\partial x_s \partial x_s} \frac{\partial^2 F}{\partial x_r \partial x_r} + \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{q_V}{\lambda^{(T)}},$$

где  $q_V = \rho r$  — объемная плотность мощности тепловых источников (стоков).

При стационарном распределении температуры в рассматриваемой области функцию напряжений определяют из уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial x_s \partial x_s} \frac{\partial^2 F}{\partial x_r \partial x_r} = \frac{q_V}{\lambda^{(T)}},$$

и, наконец, при  $q_V = 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_s \partial x_s} \frac{\partial^2 F}{\partial x_r \partial x_r} = 0.$$

Граничные условия для функции  $F$  формулируют следующим образом. Введем на границе области локальную систему ортогональных координат, направления осей которой совпадают с направлениями единичных векторов внешней нормали  $\mathbf{n}$  и касательной  $\mathbf{s}$  к граничному контуру. Тогда

$$n_1 = \frac{dx_1}{dn} = \frac{dx_2}{ds}, \quad n_2 = \frac{dx_2}{dn} = -\frac{dx_1}{ds}$$

и из первого граничного условия (3.34) получим

$$p_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{dx_1}{ds} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial F}{\partial x_2} \right),$$

$$p_2 = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{dx_2}{ds} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \frac{dx_1}{ds} = -\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right),$$

откуда

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = -\int_0^s p_2 ds + C_1, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = \int_0^s p_1 ds + C_2,$$

где  $C_1, C_2$  — постоянные интегрирования (начало отсчета координаты  $s$  примем в некоторой фиксированной точке). Функцию  $F$  и ее производную по нормали  $\partial F/\partial n$  найдем следующим образом:

$$F = \int_0^s \left( -\frac{dx_1}{ds} \int_0^s p_2 ds + \frac{dx_2}{ds} \int_0^s p_1 ds \right) ds + C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3,$$

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{dx_1}{dn} \left( -\int_0^s p_2 ds + C_1 \right) + \frac{dx_2}{dn} \left( \int_0^s p_1 ds + C_2 \right).$$

Для односвязного тела можно принять  $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ , так как эти постоянные не влияют на распределение компонентов тензора напряжений в рассматриваемой области. Если  $p_1 = p_2 = 0$ , то на границе области  $\partial F/\partial n = 0$ .

После того, как функция напряжений найдена, компоненты тензора напряжений определяются по соотношениям (4.35). Постоянную  $\varepsilon_{33}^{(0)}$  для плоского деформированного состояния находят из условия

$$\int_{S_3} \sigma_{33} dS_3 = P,$$

где  $S_3$  — площадь торцевого сечения при  $x_3 = l$ ,  $P$  — равнодействующая сил, приложенных на этом торце в направлении оси  $ox_3$ ; на втором торце цилиндрического тела ( $x_3 = 0$ ) полагаем  $u_3 = 0$  и, следовательно,  $u_3^{(0)} \equiv 0$ .

### 4.3. Термоупругая среда с внутренними параметрами состояния.

Для описания поведения рассматриваемой сплошной среды введем один скалярный параметр  $\Phi$  и один векторный  $\chi$  с компонентами  $\chi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Их физический смысл состоит в следующем.

Для термодинамических систем, находящихся в состоянии равновесия, абсолютная температура  $T(x_1, x_2, x_3, t)$  — одно из основных реактивных переменных, определяющих свободную энергию системы. Если же протекающий в термодинамической системе процесс неравновесен (или локально неравновесен, т. е. неравновесен в окрестности произвольной точки среды), то в рассмотрение вводят еще и *термодинамическую температуру*  $\Phi(x_1, x_2, x_3, t)$ , которая совпадает с абсолютной, если скорость изменения  $\Phi$  равна нулю. Если абсолютная температура  $T$  служит мерой средней кинетической энергии в равновесном процессе, то термодинамическая — в неравновесном.

Распространение теплоты будем характеризовать векторным внутренним параметром состояния  $\chi$ , который, например, для кристаллических материалов можно ассоциировать с вектором плотности распределения фононов.

Кинетические уравнения, описывающие изменение во времени  $\Phi$  и  $\chi$ , в линейном приближении примем в виде

$$\tau_T \dot{\Phi} = \bar{\Phi} - \Phi, \quad \tau_q \dot{\chi}_i = \bar{\chi}_i - \chi_i, \quad (4.37)$$

где  $\tau_T, \tau_q$  — времена релаксации внутренних параметров состояния, обратно пропорциональные частотам соответственно собственных колебаний молекул в неравновесном процессе и взаимодействия фононов;  $\bar{\Phi}, \bar{\chi}_i$  — установившиеся значения этих параметров.

Поскольку уравнения (4.37) линейны, их решения имеют вид

$$\Phi = \bar{\Phi} - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_T}\right) \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t'} dt', \quad \chi_i = \bar{\chi}_i - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_q}\right) \frac{\partial \bar{\chi}_i}{\partial t'} dt'. \quad (4.38)$$

Зададим выражение для свободной энергии аналогично (4.1), но с учетом малости векторного внутреннего параметра состояния, т. е.  $|\chi| \ll 1$ :

$$\begin{aligned} \rho A(\varepsilon_{kl}, T, \Phi, \chi_k) = & \frac{1}{2} C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}) (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(T)}) + \frac{1}{2} H_{ijkl} \beta_{kl} \beta_{ij} + \\ & + \frac{1}{2} F_{ij} \chi_j \chi_i + \rho B(T) + \rho B_1(\Phi, T) - D_{ijkl} \beta_{kl} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(T)}) - K_{ijk} \chi_k (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(T)}) + \\ & + \frac{1}{2} C_{ijkl} (-\varepsilon_{kl}^{(T)}) (-\varepsilon_{ij}^{(T)}) + D_{ijkl} \beta_{kl} (-\varepsilon_{ij}^{(T)}) + K_{ijk} \chi_k (-\varepsilon_{ij}^{(T)}), \end{aligned} \quad (4.39)$$

где  $\beta_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(\Phi)} - \varepsilon_{ij}^{(T)}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{(\Phi)}$  — компоненты тензора  $\hat{\varepsilon}^{(\Phi)}$ , определяемого термодинамической температурой,  $\|\varepsilon_{ij}^{(\Phi)}\| \ll 1$ . Очевидно, что если  $\Phi \rightarrow T$ , то  $\beta_{ij} \rightarrow 0$ . При температуре  $T_0$  естественного состояния термодинамической системы  $B_1(T_0, T_0) = 0$ , т. е. свободная энергия — функция только деформации, а при  $\varepsilon_{ij} = 0$  свободная энергия зависит только от абсолютной и термодинамической температур и векторного внутреннего параметра состояния.

Выражения для компонентов тензора напряжений и массовой плотности энтропии следуют из соотношения (4.39) и первых двух равенств (3.51):

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}) - D_{ijkl} \beta_{kl} - K_{ijk} \chi_k, \quad (4.40)$$

$$h = \frac{1}{\rho} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{(T)}}{\partial T} - \frac{\partial B}{\partial T} - \frac{\partial B_1}{\partial T}. \quad (4.41)$$

Полагая, что при температуре  $T_0$  естественного состояния и  $\varepsilon_{ij} = 0$  массовая плотность энтропии  $h = 0$ , получим, в общем случае,  $\partial B / \partial T = 0$  и  $\partial B_1 / \partial T = 0$ .

Соотношение (4.41) дает возможность получить уравнение закона сохранения энергии в виде уравнения теплопроводности, аналогичного (3.53):

$$-\rho T \left( \frac{\partial^2 B}{\partial T^2} + \frac{\partial^2 B_1}{\partial T^2} \right) \frac{\partial T}{\partial t} - \rho T \frac{\partial^2 B_1}{\partial T \partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + T C_{ijkl} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t} \alpha_{ij}^{(T)} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho r + \delta, \quad (4.42)$$

где, как и выше,  $\alpha_{ij}^{(T)} = \partial \varepsilon_{ij}^{(T)} / \partial T$ . В дальнейшем положим также  $\partial \varepsilon_{ij}^{(\Phi)} / \partial \Phi = \alpha_{ij}^{(T)}$ .



Диссипативная функция для рассматриваемой сплошной среды

$$\delta = -\rho \frac{\partial A}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho \frac{\partial A}{\partial \chi_i} \frac{\partial \chi_i}{\partial t} = \left( D_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)} \varepsilon_{ij} - H_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)} \beta_{ij} - \rho \frac{\partial B_1}{\partial \Phi} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \left( K_{ijk} \varepsilon_{ij} - F_{kj} \chi_j \right) \frac{\partial \chi_k}{\partial t}. \quad (4.43)$$

Очевидно, что при  $\dot{\Phi} \rightarrow 0$  и  $\dot{\chi}_i \rightarrow 0$  диссипативная функция  $\delta \rightarrow 0$ .

Дальнейшая конкретизация уравнений (4.40) и (4.41) связана с выбором вида функций установившихся значений внутренних параметров состояния и вектора плотности теплового потока. В данном случае примем их в простейшем виде:

$$\bar{\Phi} = T, \quad \bar{\chi}_i = -Z_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad q_i = \varphi_{ij} \chi_j, \quad (4.44)$$

не противоречащем принципам рациональной термодинамики. Кроме того, положим, что  $c_\varepsilon = -T(\partial^2 B / \partial T^2 + \partial^2 B_1 / \partial T^2) = -T \partial^2 B_1 / (\partial T \partial \Phi)$ . Тогда уравнение теплопроводности (4.42) с учетом соотношений (4.38) и (4.44) примет вид

$$\rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\rho c_\varepsilon}{\tau_T} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_T}\right) \frac{\partial T}{\partial t'} dt' = -T C_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_{ij}^{(T)} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_q}\right) \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial T}{\partial x_j} dt' \right) \right) + \rho r + \delta,$$

или

$$\rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\rho c_\varepsilon}{\tau_T} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_T}\right) \frac{\partial T}{\partial t'} dt' = -T \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\boldsymbol{\alpha}}^{(T)} \cdot \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left( \hat{\boldsymbol{\lambda}}^{(T)} \cdot \left( \nabla_{\mathbf{x}} T - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_q}\right) \frac{\partial}{\partial t'} (\nabla_{\mathbf{x}} T) dt' \right) \right) + \rho r + \delta, \quad (4.45)$$

где  $\lambda_{ij}^{(T)} = \varphi_{ik} Z_{kj}$  — компоненты тензора теплопроводности  $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ .

Задав выражение для  $\bar{\chi}_i$  в виде второго равенства из (4.44) и учитывая третье равенство из (3.51), получим  $F_{kj} \equiv 0$  и  $K_{ijk} \equiv 0$ . Следовательно,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \left( \varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)} \right) - D_{ijkl} \beta_{kl},$$

или

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{C}} \cdot \left( \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(T)} \right) - \hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}}, \quad (4.46)$$

где  $\widehat{\mathbf{b}}$  — тензор второго ранга с компонентами  $\beta_{kl}$ ,  $\widehat{\mathbf{D}}$  — тензор четвертого ранга с компонентами  $D_{ijkl}$ .

Соотношения (4.46) можно записать иначе, используя первые равенства из (4.38) и (4.44):

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \left( \varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)} \right) + D_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)} \int_0^t \exp \left( -\frac{t-t'}{\tau_T} \right) \frac{\partial T}{\partial t'} dt',$$

или

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}} = \widehat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \left( \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(T)} \right) - \widehat{\mathbf{D}} \cdot \cdot \widehat{\boldsymbol{\alpha}}^{(T)} \int_0^t \exp \left( -\frac{t-t'}{\tau_T} \right) \frac{\partial T}{\partial t'} dt'. \quad (4.47)$$

Если подставить соотношения (4.47) в уравнения закона сохранения количества движения (уравнения движения) (3.11), то мы получим систему трех интегродифференциальных уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( C_{ijkl} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \varepsilon_{kl}^{(T)} \right) + D_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)} \int_0^t \exp \left( -\frac{t-t'}{\tau_T} \right) \frac{\partial T}{\partial t'} dt' \right) + \rho b_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},$$

которая для изотропного и однородного тела примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \rho b_i - (3\lambda + 2\mu) \alpha^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \\ + (3D_1 + 2D_2) \alpha^{(T)} \int_0^t \exp \left( -\frac{t-t'}{\tau_T} \right) \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial T}{\partial x_i} dt' = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \mu \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{u} \nabla_{\mathbf{x}}) + (\lambda + \mu) \nabla_{\mathbf{x}} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{b} - (3\lambda + 2\mu) \alpha^{(T)} \nabla_{\mathbf{x}} T + \\ + (3D_1 + 2D_2) \alpha^{(T)} \int_0^t \exp \left( -\frac{t-t'}{\tau_T} \right) \frac{\partial}{\partial t'} \nabla_{\mathbf{x}} T dt' = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (4.48) \end{aligned}$$

где  $D_{ijkl} = D_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + D_2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ ;  $D_1, D_2$  — аналоги коэффициентов Ламе, учитывающие влияние скорости изменения градиента абсолютной температуры на вектор перемещения  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ .

Для однозначного определения решения уравнений теплопроводности (4.45) и движения (4.48) используют следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} T(M, 0) = T^{(0)}(M), \quad \dot{T}(M, 0) = \dot{T}^{(0)}(M); \\ u_i(M, 0) = u_i^{(0)}(M), \quad \dot{u}_i(M, 0) = \dot{u}_i^{(0)}(M), \quad M \in V, \end{aligned} \quad (4.49)$$

где  $\dot{T}^{(0)}$  — известное в начальный момент времени  $t = 0$  значение скорости изменения абсолютной температуры, остальные функции совпадают с введенными ранее в (4.16).

Граничные условия на поверхности  $S$  для уравнения теплопроводности (4.45) будут иметь вид

$$\begin{aligned}
 & -\lambda_{ij}^{(T)} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} - \int_0^t \exp \left( -\frac{t-t'}{\tau_q} \right) \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) n_i = \tilde{q}(M, t), \quad \text{или} \\
 & -\mathbf{n}^T \cdot \hat{\boldsymbol{\lambda}}^{(T)} \cdot \left( \nabla_{\mathbf{x}} T - \int_0^t \exp \left( -\frac{t-t'}{\tau_q} \right) \frac{\partial}{\partial t'} \nabla_{\mathbf{x}} T \right) = \tilde{q}(M, t), \\
 & \hspace{15em} M \in S_q, \quad S_q \subset S; \\
 & -\lambda_{ij}^{(T)} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} - \int_0^t \exp \left( -\frac{t-t'}{\tau_q} \right) \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) n_i = \\
 & \hspace{15em} = \alpha(M, t)(T^*(M, t) - T(M, t)), \quad \text{или} \\
 & -\mathbf{n}^T \cdot \hat{\boldsymbol{\lambda}}^{(T)} \cdot \left( \nabla_{\mathbf{x}} T - \int_0^t \exp \left( -\frac{t-t'}{\tau_q} \right) \frac{\partial}{\partial t'} \nabla_{\mathbf{x}} T \right) = \\
 & \hspace{15em} = \alpha(M, t)(T^*(M, t) - T(M, t)), \\
 & \hspace{5em} M \in S_\alpha \subset S, \quad S_\alpha \cap S_q = \emptyset; \\
 & T(M, t) = T^*(M, t), \quad M \in S_T = S \setminus (S_q \cup S_\alpha).
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

Граничные условия для уравнений (4.48) сохраняют вид (4.13).

Условия на поверхности разрыва для рассматриваемой термоупругой среды с внутренними параметрами состояния могут быть получены аналогично тому, как это было сделано ранее в п. 4.1. Тогда из уравнений движения

$$-\rho[\dot{u}_i]D - [\sigma_{ij}]n_j = 0;$$

из соотношений Коши

$$-[\varepsilon_{ij}]D = \frac{1}{2}([\dot{u}_i]n_j + [\dot{u}_j]n_i);$$

из соотношений (4.46)

$$[\sigma_{ij}]D = C_{ijkl}([\varepsilon_{kl}] - \alpha_{kl}^{(T)}[T])D - D_{ijkl}\alpha_{kl}^{(T)}([\Phi] - [T])D; \tag{4.51}$$

из уравнения (4.42)

$$\rho c_\varepsilon [T]D + \rho c_\varepsilon [\Phi]D = -T_0 C_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)} [\varepsilon_{ij}]D + [q_i]n_i;$$

из уравнений (4.37) с учетом соотношений (4.44)

$$\tau_T [\Phi]D = 0, \quad \tau_q [\chi_i]D = Z_{ij} [T]n_j, \quad [q_i]D = \varphi_{ij} [\chi_j]D.$$

Последовательно исключая из системы уравнений (4.51) неизвестные  $[\sigma_{ij}]$ ,  $[\varepsilon_{ij}]$ ,  $[\chi_i]$ , и  $[q_i]$ , а также учитывая непрерывность термодинамической температуры ( $[\Phi] = 0$  при  $\tau_T \neq 0$  и  $D \neq 0$ ), получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} B_{11}X_1 + B_{12}X_2 &= 0, \\ B_{21}X_1 + B_{22}X_2 &= 0, \end{aligned} \quad (4.52)$$

где  $B_{11}$  — матрица порядка  $(3 \times 3)$ , элементы которой  $B_{11ik} = -\rho D^2 \delta_{ik} + C_{ijkl} n_j n_l$ ;  $B_{12}$  — матрица порядка  $(3 \times 1)$  с элементами  $B_{12i} = (C_{ijkl} - D_{ijkl}) \alpha_{kl}^{(T)} n_j D$ ;  $B_{21}$  — матрица порядка  $(1 \times 3)$ , элементы которой  $B_{21i} = T_0 C_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)} n_j$  и, наконец,  $B_{22}$  — матрица порядка  $(1 \times 1)$ ,  $B_{22} = -\rho c_\varepsilon D^2 + \lambda_{ij}^{(T)} n_j n_i / \tau_q$ ;  $X_1$ ,  $X_2$  — векторы неизвестных значений скачков  $[\dot{u}_i]$  и  $[T]$  соответственно.

Поскольку в общем случае  $X_1 \neq 0$  и  $X_2 \neq 0$  одновременно, то скорости распространения скачков  $[\dot{u}_i]$  и  $[T]$  определяют из условия равенства нулю определителя системы уравнений (4.52):

$$\det \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = 0. \quad (4.53)$$

По аналогии с терминологией, принятой в классической теории термоупругости, четыре в общем случае различных значения  $D$ , полученные из уравнения (4.53), можно назвать скоростями распространения квазиупругой термоупругой волны и квазитемпературной волны. Скорости распространения упругих возмущений и теплоты также можно получить из уравнения (4.53) при  $B_{12} = 0$  и  $B_{21} = 0$ , т. е.

$$\begin{aligned} \det(\rho D^2 \delta_{ik} - C_{ijkl} n_j n_l) &= 0, \\ \rho c_\varepsilon D^2 - \frac{\lambda_{ij}^{(T)} n_j n_i}{\tau_q} &= 0. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Для изотропной среды квадрат скорости распространения теплоты

$$D_q^2 = \frac{\lambda^{(T)}}{\rho c_\varepsilon \tau_q},$$

а скорости распространения продольных и поперечных упругих возмущений определяют равенства (4.22).

Главное отличие уравнения теплопроводности (4.48) от уравнения (4.8) состоит в том, что оно описывает процесс теплопроводности с конечной скоростью распространения теплоты. Кроме того, уравнение (4.48) учитывает неравновесность процесса аккумуляции теплоты и эффекты связанности полей температуры и деформации. Очевидно, что при  $\tau_q \rightarrow \rightarrow 0$  скорость распространения теплоты  $D_q \rightarrow \infty$ .

**4.4. Термоупругая сплошная среда скоростного типа.** Одним из возможных вариантов линейной термоупругой сплошной среды является такая среда, для которой, наряду с другими реактивными переменными  $(\varepsilon_{ij}, T, \vartheta_i, \dots)$  — аргументами активных переменных, используют скорость изменения абсолютной температуры  $\dot{T}$ . При построении математической модели такой среды введем в рассмотрение термодинамическую температуру  $\Phi$ . Термодинамическая температура совпадает с абсолютной, если  $\Phi \rightarrow 0$ . Положим, что в неравенстве Клаузиуса–Дюгема можно заменить абсолютную температуру на термодинамическую. В этом случае

$$\rho \Phi \frac{\partial h}{\partial t} + \Phi \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{q_i}{\Phi} \right) - \rho r \geq 0. \quad (4.55)$$

С помощью видоизмененного определения массовой плотности свободной энергии:

$$A = u - \Phi h$$

представим неравенство (4.55) в виде

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \rho \frac{\partial A}{\partial t} - \rho h \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - \frac{1}{\Phi} q_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \rho r \geq 0.$$

С учетом закона сохранения энергии, задаваемого выражением (3.32), последнее неравенство приобретает следующий вид:

$$-\rho \frac{\partial A}{\partial t} + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho \dot{\Phi} h - \frac{1}{\Phi} q_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \geq 0, \quad \text{или} \quad -\frac{1}{\Phi} q_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \delta \geq 0, \quad (4.56)$$

где  $\delta = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho(\dot{A} + h\dot{\Phi})$  — диссипативная функция.

Положим, что активные переменные связаны с реактивными переменными  $\varepsilon_{kl}$ ,  $T$ ,  $\dot{T}$  и  $\vartheta_k$  соотношениями

$$\begin{aligned} A &= A(\varepsilon_{kl}, T, \dot{T}, \vartheta_k); \\ h &= h(\varepsilon_{kl}, T, \dot{T}, \vartheta_k); \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}, T, \dot{T}, \vartheta_k); \\ q_i &= q_i(\varepsilon_{kl}, T, \dot{T}, \vartheta_k); \\ \Phi &= \Phi(\varepsilon_{kl}, T, \dot{T}, \vartheta_k). \end{aligned} \quad (4.57)$$

После подстановки первого и последнего соотношений из (4.57) в неравенство (4.56) получим

$$\begin{aligned} -\rho \left( \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} - \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} + h \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho \left( \frac{\partial A}{\partial T} + h \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right) \dot{T} - \\ - \rho \left( \frac{\partial A}{\partial \dot{T}} + h \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{T}} \right) \ddot{T} - \rho \left( \frac{\partial A}{\partial \vartheta_i} + h \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_i} \right) \dot{\vartheta}_i - \frac{1}{\Phi} q_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \geq 0. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Если учесть равенство

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{kl}} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial T} \vartheta_i + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{T}} \dot{\vartheta}_i + \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_k} \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_i},$$

то (4.58) можно записать иначе:

$$\begin{aligned}
 & -\rho \left( \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} - \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} + h \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho \left( \frac{\partial A}{\partial T} + h \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right) \dot{T} - \\
 & - \rho \left( \frac{\partial A}{\partial T} + h \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right) \ddot{T} - \rho \left( \frac{\partial A}{\partial \vartheta_i} + h \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_i} + \frac{1}{\rho \Phi} q_i \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right) \dot{\vartheta}_i - \\
 & - \frac{1}{\Phi} \left( q_i \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{kl}} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x_i} + q_i \frac{\partial \Phi}{\partial T} \vartheta_i + q_i \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_k} \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_i} \right) \geq 0. \quad (4.59)
 \end{aligned}$$

Поскольку в рассматриваемом процессе неравенство (4.59) справедливо для произвольных скоростей  $\dot{\varepsilon}_{ij}$ ,  $\ddot{T}$  и  $\dot{\vartheta}_i$ , то

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} &= \rho \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} + \rho h \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \frac{\partial A}{\partial T} + h \frac{\partial \Phi}{\partial T} = 0, \\
 q_i &= -\rho \Phi \left( \frac{\partial A}{\partial \vartheta_i} + h \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_i} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)^{-1}, \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$-\rho \left( \frac{\partial A}{\partial T} + h \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right) \dot{T} - \frac{1}{\Phi} \left( q_i \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{kl}} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x_i} + q_i \frac{\partial \Phi}{\partial T} \vartheta_i + q_i \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_k} \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_i} \right) \geq 0.$$

Слагаемые в неравенстве (4.59), содержащие в качестве сомножителей  $q_i (\partial \Phi / \partial \varepsilon_{kl}) (\partial \varepsilon_{kl} / \partial x_i)$  и  $q_i (\partial \Phi / \partial \vartheta_k) (\partial \vartheta_k / \partial x_i)$ , запишем следующим образом:

$$\begin{aligned}
 q_i \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{kl}} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x_i} &= \frac{1}{2} \left( q_i \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{kl}} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x_i} + q_l \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ki}} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left( q_i \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{kl}} + q_l \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ki}} \right) \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x_i}; \\
 q_i \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_k} \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_i} &= \frac{1}{2} \left( q_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_i} + q_k \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_i} \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left( q_i \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_k} + q_k \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_i} \right) \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_i},
 \end{aligned}$$

откуда, в силу произвольности  $\partial \varepsilon_{kl} / \partial x_i$  и  $\partial \vartheta_k / \partial x_i$ , получим

$$q_i \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{kl}} + q_l \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ki}} = 0, \quad q_i \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_k} + q_k \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_i} = 0.$$

Поскольку в общем случае  $q_i q_i \neq 0$ , то из последних равенств следуют ограничения на вид функции  $\Phi$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{kl}} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_k} = 0, \quad (4.61)$$

т. е. термодинамическая температура не зависит от градиента абсолютной температуры и тензора деформации. С учетом соотношений (4.61) первое и третье равенства и неравенство из (4.60) примут более простой вид:

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad q_i = -\rho \Phi \left( \frac{\partial A}{\partial \vartheta_i} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)^{-1}, \quad -\rho \left( \frac{\partial A}{\partial T} + h \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right) \dot{T} \geq 0. \quad (4.62)$$

С учетом второго равенства из (4.60), равенств (4.61) и первого равенства из (4.62) запишем закон сохранения энергии в следующем виде:

$$\rho \left( \frac{\partial A}{\partial T} + h \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right) \dot{T} + \rho \frac{\partial A}{\partial \vartheta_i} \dot{\vartheta}_i + \rho \Phi \dot{h} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - \rho r = 0,$$

или, по аналогии с (3.46),

$$\rho \Phi \dot{h} = - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho r + \rho \frac{\partial A}{\partial \vartheta_i} \dot{\vartheta}_i + \delta, \quad (4.63)$$

где диссипативная функция  $\delta = -\rho \left( \frac{\partial A}{\partial T} + h \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right) \dot{T}$ .

Неравенство (4.59) с учетом тех же соотношений также примет более простой вид:

$$\frac{1}{\Phi} q_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \rho \left( \frac{\partial A}{\partial T} + h \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right) \dot{T} \leq 0, \quad \text{или} \quad \frac{1}{\Phi} q_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \delta \leq 0. \quad (4.64)$$

Дальнейшая конкретизация уравнений рассматриваемого варианта термоупругой среды связана с выбором вида функций  $\rho A(\varepsilon_{kl}, T, \dot{T}, \vartheta_k)$  и  $\Phi(T, \dot{T})$ . Зададим их как

$$\begin{aligned} \rho A(\varepsilon_{kl}, T, \dot{T}, \vartheta_k) = & \frac{1}{2} C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)} - \gamma_{kl}^{(T)}) (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(T)} - \gamma_{ij}^{(T)}) + \\ & + \frac{1}{2} \tilde{D}_{ij} \vartheta_j \vartheta_i + \rho B(T, \dot{T}) + \tilde{E}_i(T, \dot{T}) \vartheta_i + F_{ijk} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(T)} - \gamma_{ij}^{(T)}) \vartheta_k - \\ - & \frac{1}{2} C_{ijkl} (-\varepsilon_{kl}^{(T)}) (-\varepsilon_{ij}^{(T)}) - \frac{1}{2} C_{ijkl} (-\gamma_{kl}^{(T)}) (-\gamma_{ij}^{(T)}) - C_{ijkl} (-\varepsilon_{kl}^{(T)}) (-\gamma_{ij}^{(T)}) - \\ & - F_{ijk} (-\varepsilon_{ij}^{(T)} - \gamma_{ij}^{(T)}) \vartheta_k, \quad (4.65) \end{aligned}$$

где  $\gamma_{ij}^{(T)}$  — компоненты тензора  $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ , определяемого скоростью изменения абсолютной температуры  $\dot{T}$ , и

$$\Phi = T + \Psi(T, \dot{T}), \quad \Psi(T, \dot{T}) = 0 \quad \text{при} \quad T = T_0 \quad \text{и} \quad \dot{T} = 0. \quad (4.66)$$

Очевидно, что из (4.65) при  $\varepsilon_{ij} = 0$  следует

$$\rho A(0, T, \dot{T}, \vartheta_k) = \frac{1}{2} \tilde{D}_{ij} \vartheta_j \vartheta_i + \rho B(T, \dot{T}) + \tilde{E}_i(T, \dot{T}) \vartheta_i.$$

Из первого равенства (4.62) и выражения (4.65) получаем

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)} - \gamma_{kl}^{(T)}) + F_{ijk} \vartheta_k, \quad (4.67)$$

а из второго равенства (4.62) и выражения (4.66) находим

$$q_i = -\rho (\tilde{D}_{ij} \vartheta_j + \tilde{E}_i(T, \dot{T})) \frac{T + \Psi(T, \dot{T})}{\partial \Psi / \partial \dot{T}}. \quad (4.68)$$

Далее, так как  $\sigma_{ij} = 0$  при  $\varepsilon_{kl} = 0$ ,  $\varepsilon_{kl}^{(T)} = 0$  и  $\gamma_{kl}^{(T)} = 0$ , то  $F_{ijk} = 0$ . Для линейризации соотношения (4.62) положим, что  $|\Psi(T, \dot{T})|/T \ll 1$ ,  $\partial \Psi / \partial \dot{T} = \psi_0 = \text{const}$  и, кроме того,  $T \approx T_0$ . Последнее допущение

дает возможность в дальнейшем принять  $\tilde{E}_i(T, \dot{T}) = \tilde{E}_i(\dot{T}) = \tilde{E}_i^{(0)} \dot{T}$ . С учетом сказанного, окончательно соотношения (4.67) и (4.68) примут вид

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)} - \gamma_{kl}^{(T)}), \\ q_i &= -\lambda_{ij}^{(T)} \vartheta_j - E_i \dot{T},\end{aligned}\quad (4.69)$$

где  $\lambda_{ij}^{(T)} = \tilde{D}_{ij} T_0 / \psi_0$  — компоненты тензора теплопроводности  $\hat{\lambda}^{(T)}$ ,  $E_i = \tilde{E}_i^{(0)} T_0 / \psi_0$ .

Для нахождения из закона сохранения энергии (4.63) уравнения теплопроводности воспользуемся вторым равенством из (4.60) и принятыми при получении соотношений (4.69) допущениями. Тогда

$$\begin{aligned}\rho \Phi \dot{h} &\approx -\rho \frac{T_0}{\psi_0} \frac{\partial^2 B}{\partial T \partial \dot{T}} \dot{T} - \rho \frac{T_0}{\psi_0} \frac{\partial^2 B}{\partial T^2} \ddot{T} - \frac{T_0}{\psi_0} \tilde{E}_i^{(0)} \dot{\vartheta}_i + \frac{T_0}{\psi_0} C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \frac{\partial \gamma_{ij}^{(T)}}{\partial \dot{T}}, \\ \frac{\partial q_i}{\partial x_i} &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} (E_i \dot{T}), \\ \delta &= \left( C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \alpha_{ij}^{(T)} - \rho \frac{\partial B}{\partial T} + \frac{\rho}{\psi_0} \frac{\partial B}{\partial \dot{T}} + \frac{\tilde{E}_i^0}{\psi_0} \vartheta_i - \frac{1}{\psi_0} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \frac{\partial \gamma_{ij}^{(T)}}{\partial \dot{T}} \right) \dot{T}\end{aligned}\quad (4.70)$$

и, если обозначить  $-T_0 \left( \frac{\partial^2 B}{\partial T \partial \dot{T}} \right) \psi_0^{-1} = c_\varepsilon$ ,  $\left( \frac{\partial^2 B}{\partial T^2} \right) \left( \frac{\partial^2 B}{\partial T \partial \dot{T}} \right)^{-1} = \tau_q$ , то окончательно уравнение теплопроводности примет вид

$$\begin{aligned}\rho c_\varepsilon \tau_q \ddot{T} + \rho c_\varepsilon \dot{T} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} (E_i \dot{T}) + \\ &+ E_i \dot{\vartheta}_i - \frac{T_0}{\psi_0} C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \frac{\partial \gamma_{ij}^{(T)}}{\partial \dot{T}} + \rho r + \left( C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \alpha_{ij}^{(T)} - \right. \\ &\left. - \rho \frac{\partial B}{\partial T} + \frac{\rho}{\psi_0} \frac{\partial B}{\partial \dot{T}} + \frac{E_i}{T_0} \vartheta_i - \frac{1}{\psi_0} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \frac{\partial \gamma_{ij}^{(T)}}{\partial \dot{T}} \right) \dot{T}.\end{aligned}\quad (4.71)$$

Для рассматриваемой модели термоупругой однородной и изотропной среды уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \rho b_i - (3\lambda + 2\mu) \alpha^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_i} - \\ - (3\lambda + 2\mu) \frac{\partial \gamma^{(T)}}{\partial \dot{T}} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial t} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},\end{aligned}\quad (4.72)$$

причем  $\gamma_{ij}^{(T)} = \gamma^{(T)} \delta_{ij}$ .

Для однозначного решения уравнений теплопроводности (4.71) и движения (4.72) необходимо задать краевые условия. Начальные условия для



этих уравнений совпадают с условиями (4.49), граничные условия для уравнения (4.72) сохраняют вид (4.13), а граничные условия для уравнения (4.71) должны быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & - \left( \lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j} + E_i \dot{T} \right) n_i = \tilde{q}(M, t), \quad \text{или} \\
 & \quad - \mathbf{n}^T \cdot \left( \hat{\boldsymbol{\lambda}}^{(T)} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} T + \mathbf{E} \dot{T} \right) = \tilde{q}(M, t), \quad M \in S_q \subset S; \\
 & - \left( \lambda_{ij}(T) \frac{\partial T}{\partial x_j} + E_i \dot{T} \right) n_i = \alpha(M, t) (T^*(M, t)), \quad \text{или} \quad (4.73) \\
 & \quad - \mathbf{n}^T \cdot \left( \hat{\boldsymbol{\lambda}}^{(T)} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} T + \mathbf{E} \dot{T} \right) = \alpha(M, t) (T^*(M, t) - T(M, t)), \\
 & \quad M \in S_\alpha \subset S, \quad S_q \cap S_\alpha = \emptyset, \\
 & \quad T(M, t) = T^*(M, t), \quad M \in S_T = S \setminus (S_q \cup S_\alpha).
 \end{aligned}$$

Отметим, что уравнения (4.71) и (4.72) можно привести к виду, соответствующему уравнениям (4.10) и (4.12) классической термоупругости. Для этого устремим  $\psi_0 \rightarrow 0$ . Тогда в первом равенстве из (4.70) следует, что

$$\frac{1}{\psi_0} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \dot{T}} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial T}, \quad \left( \frac{\partial^2 B}{\partial \dot{T}^2} \right) \left( \frac{\partial^2 B}{\partial T \partial \dot{T}} \right)^{-1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{T}} = 0,$$

и, если положить  $\left( \frac{\partial \psi_{ij}^{(T)}}{\partial \dot{T}} \right) \psi_0^{-1} = \alpha_{ij}^{(T)}$ , то  $\frac{1}{\psi_0} C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \frac{\partial \gamma_{ij}^{(T)}}{\partial \dot{T}} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \alpha_{ij}^{(T)}$ .

Поскольку для классической линейной термоупругой среды  $\partial A / \partial \vartheta_i = 0$ , из второго и третьего равенств из (4.70) следует, что

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_i} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right), \quad \delta = 0,$$

т.е. в рассмотренном предельном случае уравнение (4.71) совпадает с уравнением (4.10), а уравнение (4.72) — с уравнением (4.13), так как при этом  $\partial \gamma^{(T)} / \partial \dot{T} = \psi_0 \partial \gamma^{(T)} / \partial T \rightarrow 0$ . Естественно, что совпадут и краевые условия для указанных уравнений.

Отметим, что уравнение (4.71) описывает процесс теплопроводности с конечной скоростью распространения теплоты  $D_q = \sqrt{\lambda_{ij}^{(T)} n_j n_i / (\rho c_\varepsilon \tau_q)}$ .

## 5. ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ЖИДКОСТИ

### 5.1. Жидкость как сплошная среда скоростного типа.

Термин течение (или движение) используют для обозначения мгновенного или непрерывного изменения конфигурации сплошной среды. В соответствии с нулевым законом термодинамики каждое сплошное тело имеет хотя бы одно естественное состояние. Характерным свойством текучих сред, которое можно считать определяющим для жидкости, является то, что они имеют несчетное множество естественных состояний. В качестве постулата принимают, что все состояния, для которых плотность массы совпадает с исходной, являются естественными состояниями. Поэтому одним из аргументов определяющих термодинамических функций — активных переменных — принимают якобиан  $J = dV/dV_0 = \rho_0/\rho$ , характеризующий относительное изменение объема (или плотности массы) при течении жидкости в окрестности рассматриваемой точки. Отметим, что здесь и далее понятие “жидкость” включают в себя как истинные жидкости, так и газы. Отличие газа от истинной жидкости состоит в том, что его частицы (атомы или молекулы) весьма слабо связаны между собой силами взаимодействия и движутся хаотически, заполняя весь предоставленный им объем. Истинная жидкость сохраняет свой объем при отсутствии внешних воздействий и может иметь свободную поверхность (границу между истинной жидкостью и газом).

Положим, что аргументами активных переменных — массовых плотностей свободной энергии  $A$  и энтропии  $h$ , тензора напряжений  $\hat{\sigma}$  и вектора плотности теплового потока  $\mathbf{q}$  — являются реактивные переменные: якобиан  $J$ , тензор скоростей  $\hat{V}$ , абсолютная температура  $T$  и градиент  $\vartheta$  абсолютной температуры, т. е.

$$\begin{aligned} A &= A(J, V_{kl}, T, \vartheta_k); \\ h &= h(J, V_{kl}, T, \vartheta_k); \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}(J, V_{kl}, T, \vartheta_k); \\ q_i &= q_i(J, V_{kl}, T, \vartheta_k). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Выражения (5.1) разложим в ряд Тейлора по степеням  $V_{kl}$ . Первые слагаемые в этих разложениях представляют собой равновесные значения активных переменных, а остальные слагаемые сгруппированы так, чтобы они обращались в нуль при  $V_{kl} = 0$ . Таким образом, при  $V_{kl} \rightarrow 0$  получим

$$\begin{aligned} A^0 &= A^0(J, T, \vartheta_k), & h^0 &= h^0(J, T, \vartheta_k), \\ \sigma_{ij}^0 &= \sigma_{ij}^0(J, T, \vartheta_k), & q_i^0 &= q_i^0(J, T, \vartheta_k), \end{aligned}$$

а в общем случае

$$\begin{aligned} A &= A^0 + A^D, & h &= h^0 + h^D, \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^D, & q_i &= q_i^0 + q_i^D, \end{aligned}$$

где слагаемые  $A^D$ ,  $h^D$ ,  $\sigma_{ij}^D$  и  $q_i^D$  обращаются в нуль при  $V_{kl} = 0$ .

Если подставить соотношения (5.1) в уравнение закона сохранения энергии (3.32), то с учетом соотношения (3.45) получим

$$\left( \rho \frac{\partial A}{\partial J} \frac{dJ}{dt} - \sigma_{ij} V_{ij} \right) + \rho \frac{\partial A}{\partial V_{ij}} \frac{dV_{ij}}{dt} + \rho \frac{\partial A}{\partial \vartheta_i} \frac{d\vartheta_i}{dt} + \rho \left( \frac{\partial A}{\partial T} + h \right) \frac{dT}{dt} + T \frac{dh}{dt} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - \rho r = 0. \quad (5.2)$$

Далее, так как

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial(\partial x_i / \partial a_k)} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial a_k} \right) = J \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial a_k} \right) = J \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = J V_{kk},$$

то первое слагаемое в скобках из (5.2) принимает вид

$$\rho \frac{\partial A}{\partial J} \frac{dJ}{dt} = \rho \frac{\partial A}{\partial J} J V_{ij} \delta_{ij} = \rho_0 \frac{\partial A}{\partial J} V_{ij} \delta_{ij}.$$

Вычтем из неравенства (3.42) равенство (5.2), учитывая последнее полученное выражение. Тогда

$$\begin{aligned} - \left( \rho_0 \frac{\partial A}{\partial J} \delta_{ij} - \sigma_{ij}^0 - \sigma_{ij}^D \right) V_{ij} - \rho \left( \frac{\partial A}{\partial T} + h \right) \frac{dT}{dt} - \\ - \rho \frac{\partial A}{\partial V_{ij}} \frac{dV_{ij}}{dt} - \rho \frac{\partial A}{\partial \vartheta_i} \frac{d\vartheta_i}{dt} - \frac{1}{T} q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \geq 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

откуда в силу произвольности  $V_{ij}$  и скоростей изменения реактивных переменных  $dT/dt$ ,  $dV_{ij}/dt$  и  $d\vartheta_i/dt$  следуют достаточные условия выполнения неравенства (5.3):

$$\frac{\partial A}{\partial V_{ij}} = 0; \quad A^D = 0; \quad h = -\frac{\partial A}{\partial T}; \quad (5.4)$$

$$h^D = 0; \quad \sigma_{ij}^0 = \rho_0 \frac{\partial A}{\partial J} \delta_{ij}; \quad \frac{\partial A}{\partial \vartheta_i} = 0.$$

Второй закон термодинамики в этом случае принимает вид

$$-\frac{1}{T} q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} + \delta \geq 0, \quad (5.5)$$

где диссипативная функция  $\delta = \sigma_{ij}^D V_{ij}$ . Если не учитывать взаимного влияния процесса переноса теплоты и диссипации энергии в неравенстве (5.5), то получим два неравенства:

$$-q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \geq 0, \quad \delta = \sigma_{ij}^D V_{ij} \geq 0. \quad (5.6)$$

Жидкость (текучая среда), как правило, изотропна. Поэтому в линейном приближении, при малых значениях тензора скоростей, тензор вязких напряжений имеет компоненты

$$\sigma_{ij}^D = \lambda_D V_{kk} \delta_{ij} + 2\mu_D V_{ij}, \quad (5.7)$$

где  $\lambda_D$  и  $\mu_D$  — коэффициенты вязкости, аналогичные коэффициентам Ламе.

Далее, если  $p = -\rho_0 \partial A / \partial J$  — давление в жидкости, то

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda_D V_{kk} \delta_{ij} + 2\mu_D V_{ij}. \quad (5.8)$$

Соотношения (5.8) определяют *линейную (ньютоновскую) жидкость*.

Закон сохранения энергии в форме уравнения теплопроводности можно получить, если положить  $A = A(J, T)$  и определить зависимость вектора плотности теплового потока от реактивных переменных, например, в виде закона Фурье (4.7). После некоторых преобразований, учитывающих равенства (5.4) и (5.7), получим

$$\rho c_\varepsilon \frac{dT}{dt} = \lambda_D V_{kk}^2 + 2\mu_D V_{ij} V_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \rho r - T \frac{\partial p}{\partial T} V_{kk}, \quad (5.9)$$

где  $c_\varepsilon = -T \partial^2 A(J, T) / \partial T^2$  — удельная массовая теплоемкость при постоянной деформации, или, как чаще называют эту величину в механике жидкости и газа, *удельная массовая теплоемкость при постоянном объеме*, обозначаемая  $c_V$ .

Если подставить выражение (5.8) в уравнения закона сохранения количества движения (3.11), то получим *уравнения Навье–Стокса–Дюгема*:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda_D + \mu_D) \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu_D \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho b_i,$$

или

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla_{\mathbf{x}} p + (\lambda_D + \mu_D) \nabla_{\mathbf{x}} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}) + \mu_D \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v} \nabla_{\mathbf{x}}) + \rho \mathbf{b}. \quad (5.10)$$

Полная система уравнений, описывающих течение жидкости, в рассматриваемом варианте содержит шесть неизвестных:  $\rho$ ,  $T$ ,  $v_i$  и  $p$ . Для их определения совместно решают систему уравнений теплопроводности (5.9), Навье–Стокса–Дюгема (5.10), неразрывности (3.5), используя *уравнение состояния*

$$p = p(\rho, T). \quad (5.11)$$

Эта система уравнений является замкнутой.

Если рассматриваемая жидкость несжимаема ( $\partial v_j / \partial x_j = 0$ ), то уравнения (5.10) переходят в *уравнения Навье–Стокса*:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu_D \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho b_i,$$

или

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla_{\mathbf{x}} p + \mu_D \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v} \nabla_{\mathbf{x}}) + \rho \mathbf{b}. \quad (5.12)$$

Определим из соотношений (5.8) среднее нормальное напряжение:

$$\frac{1}{3} \sigma_{kk} = -p + 3K_D V_{kk},$$

где  $K_D$  — коэффициент объемной вязкости. Условие

$$K_D = \lambda_D + \frac{2}{3}\mu_D = 0 \quad (5.13)$$

называют *условием Стокса*. В соответствии с ним величина среднего нормального напряжения в движущейся жидкости определяется только уравнением состояния (5.11) и совпадает с этой величиной в покоящейся жидкости.

При выполнении условия Стокса (5.13) уравнения (5.10) принимают вид

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{3}\mu_D \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu_D \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho b_i,$$

или

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla_{\mathbf{x}} p + \frac{1}{3}\mu_D \nabla_{\mathbf{x}} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}) + \mu_D \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v} \nabla_{\mathbf{x}}) + \rho \mathbf{b}. \quad (5.14)$$

Уравнения Навье–Стокса можно записать в безразмерном виде, используя характерные размер области  $L$ , величины скорости  $v$  и плотности  $\rho$ . Тогда некоторые появляющиеся в безразмерной форме записи коэффициенты позволяют судить о характере течения жидкости. Так, например, коэффициент  $Re = \rho v L / \mu_D$ , называемый *числом Рейнольдса*, выражает соотношение между силами инерции и силами вязкого трения. При очень больших величинах  $Re$  влиянием вязкости в уравнениях движения можно пренебречь и рассматривать жидкость как *невязкую*, или *идеальную*.

**5.2. Идеальная жидкость.** Для получения уравнений движения идеальной жидкости положим в уравнениях движения (5.14) коэффициент вязкости  $\mu_D = 0$ . Тогда

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho b_i, \quad \text{или} \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla_{\mathbf{x}} p + \rho \mathbf{b} \quad (5.15)$$

— *уравнения Эйлера*.

Уравнения (5.15) можно записать иначе, воспользовавшись соотношением

$$\begin{aligned} \frac{dv_i}{dt} &= \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + v_k \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - v_k \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} v_k v_k \right) + W_{ki} v_k = \\ &= \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} v_k v_k \right) + 2e_{ijk} v_k w_j, \end{aligned}$$

или

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) + 2\mathbf{w} \times \mathbf{v},$$

где  $W_{ki}$  — компоненты тензора завихренности (вихря)  $\widehat{\mathbf{W}} = \nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{v}$  из (2.59), а  $w_j = \frac{1}{2} e_{jik} W_{ki}$  в данном случае — компоненты вектора завихренности.

Во многих приложениях массовые силы  $b_i$  не зависят от времени и обладают потенциалом  $\Omega$ , т. е.  $\mathbf{b} = -\nabla_{\mathbf{x}} \Omega$ . Если, кроме того, жидкость

является *баротропной*, т. е. если плотность жидкости есть функция только давления,  $\rho = \rho(p)$ , то удобно ввести функцию

$$P(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)},$$

которую называют *функцией давления*. При указанных допущениях уравнения Эйлера (5.15) примут вид

$$2\mathbf{w} \times \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla_{\mathbf{x}} \left( P + \Omega + \frac{v^2}{2} \right). \quad (5.16)$$

В уравнении (5.16) величину  $P$  можно рассматривать как энергию давления,  $\Omega$  — как потенциальную энергию и  $v^2/2$  — как кинетическую энергию, отнесенные к единице массы. Величина  $P(p)$  представляет собой работу, совершаемую при движении единицы массы баротропной жидкости под действием изменения давления от  $p_0$  (начального) до  $p$ .

Если из массовых сил действует только сила тяжести, то  $\Omega = gh$ , где  $g$  — постоянное ускорение силы тяжести,  $h$  — высота, отсчитываемая от некоторого уровня. Величина  $h_p = P/g$  характеризует напор давления, а  $h_v = v^2/(2g)$  — скоростной напор. Иногда  $h_p$  и  $h_v$  называют *высотой давления* и *скоростной высотой* соответственно. Сумму  $H = h + h_p + h_v$  называют *полной высотой*. С учетом введенных обозначений уравнения (5.16) примут вид

$$2\mathbf{w} \times \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -g\nabla_{\mathbf{x}} H. \quad (5.17)$$

Известно, что  $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{v}) = 0$ . Тогда, по теореме Остроградского–Гаусса для части  $V$  пространства, ограниченной регулярной поверхностью  $S$  и лежащей в области определения поля скоростей, выполняется соотношение

$$\int_S \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (5.18)$$

в котором подынтегральное выражение называют *потоком вихря* через элемент  $dS$  поверхности. Векторные линии поля  $\mathbf{w}$  называют *вихревыми линиями*, а поверхность, проведенную через точки бесконечно малой замкнутой кривой, образованной вихревыми линиями, — *вихревой трубкой*.

Пусть  $dS_1$  и  $dS_2$  — площадки соседних нормальных сечений элементарной вихревой трубки, а вектор вихря направлен от  $dS_1$  к  $dS_2$ . Так как поток вихря через боковую поверхность вихревой трубки равен нулю, то, применяя уравнение (5.18) к участку вихревой трубки, ограниченному рассматриваемыми нормальными сечениями, получим

$$w_1 dS_1 = w_2 dS_2,$$

где  $w_1, w_2$  — модули вектора вихря в сечениях  $dS_1$  и  $dS_2$  соответственно. Следовательно, модуль вектора вихря изменяется вдоль вихревой трубки

обратно пропорционально площади ее поперечного сечения. Очевидно, что вихревая трубка не может оканчиваться внутри жидкости, она или замкнута или оканчивается на поверхности, ограничивающей жидкость.

Для установившегося движения  $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$ . Обозначив выражение, стоящее в скобках в уравнении (5.16), через  $G$ , получим

$$2\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \nabla_{\mathbf{x}} G.$$

Из этого уравнения следует, что в окрестности любой точки  $M$  поверхности уровня  $G = \text{const}$  вектор скорости и вектор вихря касательны к этой поверхности.

Далее, если уравнение (5.16) записать в виде

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla_{\mathbf{x}}(P + \Omega), \quad (5.19)$$

то скаляр  $-(P + \Omega)$  можно рассматривать как потенциал ускорения. По определению, *циркуляцией вектора скорости по замкнутой "жидкой" линии* называют интеграл

$$\Gamma = \oint v_i dx_i, \quad \text{или} \quad \Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}.$$

Скорость изменения  $\Gamma$ , как можно показать, равна

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint \left( \frac{dv_i}{dt} dx_i + v_i dv_i \right), \quad \text{или} \quad \frac{d\Gamma}{dt} = \oint \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{x} + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} \right). \quad (5.20)$$

Объединяя уравнения (5.19) и (5.20), получим

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint \left( -(\nabla_{\mathbf{x}}(P + \Omega)) \cdot d\mathbf{x} + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} \right)$$

и далее, учитывая очевидные равенства

$$\oint (\nabla_{\mathbf{x}}(P + \Omega)) \cdot d\mathbf{x} = 0 \quad \text{и} \quad \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = 0,$$

закключаем, что в баротропной идеальной жидкости, находящейся под действием консервативных (неизменных во времени) массовых сил, циркуляция вектора скорости по замкнутой "жидкой" кривой постоянна. Это утверждение известно как *теорема Томсона (Кельвина)*.

Рассмотрим безвихревое движение жидкости,  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ . Поле скоростей безвихревого потока обладает потенциалом скорости  $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$  и  $\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{x}}\varphi$ . Тогда из уравнения (5.16) следует соотношение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + P + \Omega + \frac{v^2}{2} = f(t). \quad (5.21)$$

Если движение жидкости установившееся, то  $\partial \varphi / \partial t = 0$ ,  $f(t) = \text{const}$  и (5.20) принимает вид

$$P + \Omega + \frac{v^2}{2} = \text{const}. \quad (5.22)$$

Уравнение (5.22) называют *уравнением Бернулли*.

Если при изучении безвихревого движения жидкости ограничиться малыми отклонениями давления и плотности от их средних значений  $p_0$  и  $\rho_0$ , не зависящих от времени и координат, то можно использовать приближенную форму представления уравнения состояния (5.11) и функции  $P(p)$  в виде

$$p - p_0 = c^2(\rho - \rho_0) \quad \text{и} \quad P = \frac{p - p_0}{\rho_0}, \quad (5.23)$$

где  $c = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)|_{\rho = \rho_0}}$  — скорость звука в жидкости. Отметим, что идеальную жидкость, уравнением состояния которой является *уравнение Клапейрона*  $p = \rho RT$ , где  $R$  — универсальная газовая постоянная, называют *совершенным газом*. Полагая, что слагаемое  $v^2/2$  в левой части уравнения (5.21) имеет более высокий порядок малости по сравнению с первым и вторым слагаемыми, и пренебрегая массовыми силами ( $\Omega \equiv 0$ ), при  $f(t) = 0$  получаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + P = 0. \quad (5.24)$$

С помощью равенств (5.23) уравнения неразрывности (3.6) можно записать в виде

$$\frac{\partial P}{\partial t} + v_k \frac{\partial P}{\partial x_k} + (c^2 + P) \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0,$$

а затем, полагая  $v_k \partial P / \partial x_k$  и  $P \partial v_k / \partial x_k$  величинами, имеющими более высокий порядок малости по сравнению с другими слагаемыми, получим

$$\frac{\partial P}{\partial t} + c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_k} = 0. \quad (5.25)$$

Исключая из уравнений (5.24) и (5.25) потенциал скорости, имеем

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x_k \partial x_k}.$$

Аналогично, исключив из уравнений (5.24) и (5.25) величину  $P$ , получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (5.26)$$

Уравнение (5.26) называют *волновым уравнением*, оно находит применение в акустике при изучении распространения малых (звуковых) возмущений в покоящейся жидкости.

В случае установившегося ( $\partial v_i / \partial t = 0$ ) безвихревого движения баротропной жидкости из уравнений Эйлера (5.15) и уравнения неразрывности при  $b_i = 0$  следуют *уравнения газовой динамики*:

$$\left( c^2 \delta_{ij} - v_i v_j \right) \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = 0, \quad \text{или} \quad c^2 \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}) = 0, \quad (5.27)$$



где  $c = \sqrt{\partial p / \partial \rho}$  — скорость звука, которая в отличие от использованной в уравнении (5.26) величины не является постоянной, а зависит от местного значения плотности  $\rho(x_1, x_2, x_3)$ .

Наконец, если скорость движения жидкости  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , то уравнения Эйлера (5.15) принимают вид

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho b_i, \quad \text{или} \quad \nabla_{\mathbf{x}} p = \rho \mathbf{b}, \quad (5.28)$$

и описывают состояние *гидростатического равновесия*.

**5.3. Некоторые особенности движения вязкой несжимаемой жидкости.** Движение вязкой несжимаемой жидкости, как отмечено ранее, описывают уравнения Навье–Стокса (5.12) и условие несжимаемости

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0.$$

Если скорость течения жидкости невелика и  $|v_j \partial v_i / \partial x_j| \ll |\partial v_i / \partial t|$ , то уравнения (5.12) принимают вид

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu_{\text{D}} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho b_i,$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla_{\mathbf{x}} p + \mu_{\text{D}} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v} \nabla_{\mathbf{x}}) + \rho \mathbf{b}. \quad (5.29)$$

Уравнения (5.29) описывают *ползущее движение* жидкости. При отсутствии массовых сил ( $b_i = 0$ ) и установившемся движении

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \mu_{\text{D}} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}.$$

Вычисляя дивергенцию от обеих частей этого равенства, получим

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} = \mu_{\text{D}} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0,$$

т.е. для такого движения давление есть гармоническая функция,  $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} p) = 0$ , или  $\nabla_{\mathbf{x}}^2 p = 0$ .

Уравнение (5.12) запишем в виде

$$2\mathbf{w} \times \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla_{\mathbf{x}} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{\mu_{\text{D}}}{\rho} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v} \nabla_{\mathbf{x}}). \quad (5.30)$$

Применяя к уравнению (5.30) операцию ротора, используя соотношения

$$\nabla_{\mathbf{x}} \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = (\mathbf{g} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{f} - (\mathbf{f} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{g} + \mathbf{f} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}) - \mathbf{g} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{f})$$

и  $\mathbf{w} = (\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{v})/2$ , получаем

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{w} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - (\mathbf{w} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{v} = \frac{\mu_{\text{D}}}{\rho} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{w} \nabla_{\mathbf{x}}),$$

а учитывая тождество

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{w},$$

окончательно имеем следующую форму записи уравнения Навье–Стокса:

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = (\mathbf{w} \cdot \nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{v} + \frac{\mu_D}{\rho} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{w} \nabla_{\mathbf{x}}). \quad (5.31)$$

При *плоском течении*  $v_1 = v_1(x_1, x_2, t)$ ,  $v_2 = v_2(x_1, x_2, t)$  и  $v_3 = 0$ . В таком случае первое слагаемое в правой части уравнения (5.31)  $(\mathbf{w} \cdot \nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , поскольку ненулевым остается только один компонент вектора  $\mathbf{w}$ ,  $w_3 \neq 0$ , а вектор скорости  $\mathbf{v}$  не зависит от координаты  $x_3$ . Следовательно, для плоского движения справедливо уравнение

$$\frac{dw_3}{dt} = \frac{\mu_D}{\rho} \frac{\partial^2 w_3}{\partial x_r \partial x_r}, \quad r = 1, 2, \quad (5.32)$$

которое называют *уравнением переноса вихря*. Уравнение (5.32) имеет такой же вид, что и уравнение теплопроводности (5.9) при отсутствии диссипативных слагаемых и тепловых источников (стоков), несжимаемости жидкости, а также ее однородности и изотропности. Так как процесс переноса теплоты представить легче, чем перенос вихря, определяемый уравнением (5.32), то аналогия между уравнением теплопроводности (5.9) при указанных упрощениях и уравнением переноса вихря может оказаться полезной. Однако необходимо отметить, что для полной аналогии между этими двумя процессами необходимо совпадение не только уравнений, но и крайних условий.

При одномерном прямолинейном течении вязкой несжимаемой жидкости

$$v_1 = v_2 = 0, \quad v_3 = v(x_1, x_2, t).$$

Уравнение неразрывности при этом удовлетворяется тождественно, а из первых двух уравнений (5.12) при  $b_i = 0$ , записанных в координатной форме, следует, что давление  $p$  не зависит от координат  $x_1$  и  $x_2$ . Тогда

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{\mu_D}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x_r \partial x_r}, \quad r = 1, 2, \quad (5.33)$$

и так как  $v$  не зависит от  $x_3$ , то  $\partial p / \partial x_3$  не зависит от  $x_3$ , т. е.

$$-\frac{\partial p}{\partial x_3} = f(x_1, x_2, t),$$

где  $f(x_1, x_2, t)$  — *градиент давления* прямолинейного потока.

В частности, если  $f(x_1, x_2, t) = \text{const}$ , то уравнение (5.33) принимает вид уравнения теплопроводности, решениям которого можно дать гидродинамическую интерпретацию.

**5.4. Вязкая жидкость как сплошная среда с памятью.** При построении определяющих соотношений мы, как и ранее, будем полагать, что все состояния сплошной среды, для которых плотность массы совпадает с исходной, являются естественными состояниями. Допустим, что в момент времени  $t$  между актуальной конфигурацией сплошной среды и начальной, соответствующей естественному состоянию, существует зависимость вида

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_j} = J(t)\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (5.34)$$

где  $J(t)$  — якобиан. Эта зависимость выражает то обстоятельство, что рассматриваемое состояние сплошной среды можно получить из естественного с помощью только объемной деформации и только пространственного поворота.

Зададим массовую плотность свободной энергии  $A$  в виде функционала

$$A = \int_{s=-\infty}^{s=t} \mathcal{A} [L_{ij}(t-s), J(t)], \quad (5.35)$$

где  $L_{ij}(t-s)$  — компоненты тензора конечной деформации Грина (2.17).

Из соотношения (5.35) следует, что единственная явная зависимость массовой плотности свободной энергии от компонентов тензора конечной деформации Грина — это зависимость через якобиан  $J(t)$ ; очевидно, что такая зависимость эквивалентна зависимости от плотности массы  $\rho(t)$ . Если допустить для соотношения (5.35) зависимость от деформации более общую, чем через одну скалярную величину  $J(t)$ , то будет нарушено предположение об отсутствии предпочтительной конфигурации. Отсюда также следует, что рассматриваемая сплошная среда изотропна, поскольку функционал (5.35) удовлетворяет принципу объективности.

Для выполнения условия (3.47) в изотермическом процессе ( $T(x_1, x_2, x_3, t) = \text{const}$ ) необходимо вычислить производную  $dA/dt$ . Используем для этого принцип затухающей памяти по отношению к историям деформации  $L_{ij}(t-s)$  так, чтобы существовал дифференциал

Фреше  $\delta \int_{s=-\infty}^{s=t} \mathcal{A} [\cdot]$  от функционала  $\int_{s=-\infty}^{s=t} \mathcal{A} [\cdot]$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{s=-\infty}^{s=t} \mathcal{A} [L_{ij}(t-s) + \delta L_{ij}(t-s), J(t)] = \\ & = \int_{s=-\infty}^{s=t} \mathcal{A} [L_{ij}(t-s), J(t)] + \delta \int_{s=-\infty}^{s=t} \mathcal{A} [L_{ij}(t-s), J(t) | \delta L_{ij}(t-s)], \quad (5.36) \end{aligned}$$

где дифференциал Фреше  $\delta \int_{s=-\infty}^{s=t} \mathcal{A} [\cdot]$  непрерывен по всем переменным и линеен по  $\delta L_{ij}(t-s)$ . В соотношении (5.36) не учтены слагаемые более высокого порядка малости по  $\delta L_{ij}(t-s)$ .

Используя выражение (5.36), получим производную по времени от массовой плотности свободной энергии в виде

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} = & \left( \frac{\partial}{\partial J(t)} \underset{s=-\infty}{\overset{s=t}{\mathcal{A}}} [L_{ij}(t-s), J(t)] \right) \frac{dJ(t)}{dt} + \\ & + \delta \underset{s=-\infty}{\overset{s=t}{\mathcal{A}}} \left[ L_{ij}(t-s), J(t) \left| \frac{dL_{ij}(t-s)}{dt} \right. \right], \end{aligned} \quad (5.37)$$

так как явно от времени  $t$  в выражении (5.36) зависят только  $J(t)$  и  $\delta L_{ij}(t-s)$ .

Используя выражения (2.17) для компонентов тензора конечной деформации Грина, с помощью соотношений (2.15) и (2.63) можно показать, что

$$\frac{dL_{ij}(t-s)}{dt} = -\frac{dL_{ij}(t-s)}{ds} - \left( G_{mi}(t-s) \frac{\partial v_m}{\partial x_j} + G_{mj}(t-s) \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right), \quad (5.38)$$

где  $G_{mi}$  — компоненты тензора деформации Грина,  $v_m = v_m(t)$  — компоненты вектора скорости. Поскольку

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = V_{ij} + W_{ij}, \quad (5.39)$$

то, подставляя выражения (5.38) и (5.39) в (5.37), получим

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial}{\partial J} \underset{s=-\infty}{\overset{s=t}{\mathcal{A}}} [\cdot] \frac{dJ}{dt} - \delta + 2 \underset{s=-\infty}{\overset{s=t}{\varphi_{mj}}} [\cdot] (V_{mj} + W_{mj}), \quad (5.40)$$

где диссипативная функция представлена функционалом

$$\delta = \delta \underset{s=-\infty}{\overset{s=t}{\mathcal{A}}} \left[ L_{ij}(t-s), J(t) \left| \frac{dL_{ij}(t-s)}{dt} \right. \right], \quad (5.41)$$

а  $\underset{s=-\infty}{\overset{s=t}{\varphi_{mj}}} [\cdot]$  — тензорный функционал, определяемый соотношением

$$\underset{s=-\infty}{\overset{s=t}{\varphi_{mj}}} [\cdot] \frac{\partial v_m}{\partial x_j} = \delta \underset{s=-\infty}{\overset{s=t}{\mathcal{A}}} \left[ L_{ij}(t-s), J(t) \left| G_{mi}(t-s) \frac{\partial v_m}{\partial x_j} \right. \right], \quad (5.42)$$

которое справедливо, поскольку дифференциал Фреше  $\delta \underset{s=-\infty}{\overset{s=t}{\mathcal{A}}} [\cdot]$  линеен относительно переменного  $G_{mi}(t-s)$ , а  $\partial v_m / \partial x_j$  не зависит от  $s$ .

Для того, чтобы функция  $dA/dt$  была инвариантна по отношению к вращению среды как абсолютно твердого тела, необходимо, чтобы значение  $\underset{s=-\infty}{\overset{s=t}{\varphi_{mj}}} [\cdot] W_{mj} \equiv 0$ , откуда следует, что функционал  $\underset{s=-\infty}{\overset{s=t}{\varphi_{mj}}} [\cdot]$  симметричен, т. е.

$$\underset{s=-\infty}{\overset{s=t}{\varphi_{mj}}} [\cdot] = \underset{s=-\infty}{\overset{s=t}{\varphi_{jm}}} [\cdot]. \quad (5.43)$$

Подставив  $dA/dt$  из выражения (5.40) в неравенство (3.47) при  $dT/dt = 0$ , с учетом равенств (5.43) и  $dJ/dt = J\partial v_i/\partial x_j\delta_{ij}$  найдем

$$\sigma_{ij}V_{ij} - \rho J \left( \frac{\partial}{\partial J} \mathcal{A}^{s=t} [\cdot] \right) V_{ij}\delta_{ij} + \rho\delta - 2\rho \mathcal{A}_{s=-\infty}^{s=t} [\cdot] V_{ij} \geq 0. \quad (5.44)$$

Так как  $V_{ij}$  произвольны, то

$$\sigma_{ij} = \rho J \left( \frac{\partial}{\partial J} \mathcal{A}^{s=t} [\cdot] \right) \delta_{ij} + 2\rho \mathcal{A}_{s=-\infty}^{s=t} [\cdot], \quad (5.45)$$

где  $\mathcal{A}_{s=-\infty}^{s=t} [\cdot]$  выражается с помощью соотношения (5.42). С учетом равенства (5.45) неравенство (5.44) принимает более простой вид:

$$\rho\delta \geq 0, \quad (5.46)$$

и выражает требование неотрицательности диссипативной функции.

Отметим, что первое слагаемое в правой части соотношения (5.45) может быть обозначено аналогично тому, как это сделано в пятом равенстве из (5.4), т. е.

$$\sigma_{ij}^0 = -p\delta_{ij},$$

где  $p = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial J} \mathcal{A}_{s=-\infty}^{s=t} [\cdot]$  и учтено равенство (3.4).

Далее, если рассматриваемая вязкая жидкость линейна, то

$$2\rho \mathcal{A}_{s=-\infty}^{s=t} [\cdot] = \lambda_D \int_{-\infty}^t \delta(s) ds V_{kk} \delta_{ij} + 2\mu_D \int_{-\infty}^t \delta(s) ds V_{ij},$$

где  $\delta(s)$  — дельта-функция Дирака,  $\lambda_D = \text{const}$  и  $\mu_D = \text{const}$ , а связь между компонентами тензоров напряжений и скоростей эквивалентна равенству (5.8).

## 6. ЛИНЕЙНАЯ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГАЯ СПЛОШНАЯ СРЕДА

**6.1. Термовязкоупругая среда скоростного типа.** В качестве примера сплошной среды скоростного типа рассмотрим *модель Кельвина–Фойгта*, в которой к числу реактивных переменных — аргументов определяющих термодинамических функций — наряду с тензором малой деформации  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , абсолютной температурой  $T$  и ее градиентом  $\boldsymbol{\vartheta}$  будем относить и тензор скоростей малой деформации  $\hat{\mathbf{V}} = \partial\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}/\partial t$ :

$$\begin{aligned} A &= A(\varepsilon_{kl}, V_{kl}, T, \vartheta_k), & h &= h(\varepsilon_{kl}, V_{kl}, T, \vartheta_k), \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}, V_{kl}, T, \vartheta_k), & q_i &= q_i(\varepsilon_{kl}, V_{kl}, T, \vartheta_k). \end{aligned} \quad (6.1)$$

В пределе, когда  $V_{ij} \rightarrow 0$ , соотношения (6.1) должны совпадать с выражениями для определяющих термодинамических функций линейной термоупругой среды. Следовательно, можно записать

$$A = A^0 + A^D, \quad h = h^0 + h^D, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^D, \quad q_i = q_i^0 + q_i^D, \quad (6.2)$$

где первые слагаемые соответствуют определяющим функциям для термоупругой среды и не зависят от  $V_{ij}$ , а вторые — зависят от  $V_{ij}$  и обращаются в нуль при  $V_{ij} = 0$ .

Если подставить соотношения (6.2) в уравнение закона сохранения энергии (3.32) или (3.35) с учетом равенства (3.45), а затем получившееся выражение вычесть из неравенства (3.42) или (3.43), то мы получим выражение для второго закона термодинамики, справедливое для модели скоростной среды Кельвина–Фойгта:

$$\begin{aligned} - \left( \rho \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} - (\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^D) \right) V_{ij} - \rho \left( \frac{\partial A}{\partial T} + h \right) \frac{\partial T}{\partial t} - \\ - \rho \frac{\partial A^D}{\partial V_{ij}} \frac{\partial V_{ij}}{\partial t} - \rho \frac{\partial A}{\partial \vartheta_i} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial t} - \frac{1}{T} q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \geq 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Это неравенство линейно относительно скоростей  $\partial V_{ij}/\partial t$ ,  $\partial T/\partial t$  и  $\partial \vartheta_i/\partial t$ , которые в соответствии с соотношениями (6.1) и (6.2) не являются реактивными переменными. Следовательно, достаточные условия выполнения неравенства (6.3) при произвольных  $V_{ij}$  и произвольных скоростях изменения реактивных переменных имеют вид

$$\frac{\partial A^D}{\partial V_{ij}} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial \vartheta_i} = 0, \quad h = -\frac{\partial A}{\partial T}, \quad \sigma_{ij}^0 = \rho \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad (6.4)$$

а второй закон термодинамики будет иметь вид

$$\delta - \frac{1}{T} q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \geq 0, \quad (6.5)$$

где диссипативная функция  $\delta = \sigma_{ij}^D V_{ij}$ .

Если допустить, что процессы вязкого деформирования и распространения теплоты независимы, то будут выполняться отдельные неравенства:

$$\sigma_{ij}^D V_{ij} \geq 0, \quad -q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \geq 0, \quad (6.6)$$

характеризующие диссипацию энергии в этих двух процессах.

Поскольку для термоупругой сплошной среды  $\sigma_{ij}^0 = \rho \partial A^0 / \partial \varepsilon_{ij}$ , то  $A^D$  не зависит от  $\varepsilon_{ij}$  и из равенств (6.4) получаем

$$A^D = 0, \quad h^D = 0, \quad \sigma_{ij} = \rho \frac{\partial A^0}{\partial \varepsilon_{ij}} + \sigma_{ij}^D. \quad (6.7)$$

Закон сохранения энергии с учетом соотношений (6.2), (6.4) и (6.7) будет иметь следующий вид:

$$\rho T \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho r + \sigma_{ij}^D V_{ij}, \quad (6.8)$$

где последнее слагаемое в правой части определяет необратимое тепловыделение, обусловленное вязким трением. Наличие этого слагаемого свидетельствует о том, что среда, описываемая моделью Кельвина–Фойгта, является локально неравновесной.

Дальнейшая конкретизация уравнения (6.8) связана с заданием вида определяющих термодинамических функций  $A^0$ ,  $q_i$  и  $\sigma_{ij}^D$ . Для рассматриваемой линейной среды вид функций  $A^0$  и  $q_i$  положим таким же, как это принято в выражениях (4.1), следующем после него и (4.7), а

$$\sigma_{ij}^D = R_{ijkl} V_{kl}, \quad (6.9)$$

где  $R_{ijkl}$  — компоненты тензора коэффициентов вязкости  $\widehat{\mathbf{R}}$ , для которого выполняются условия симметрии

$$R_{ijkl} = R_{klij}, \quad R_{ijkl} = R_{jikl}, \quad R_{ijkl} = R_{ijlk};$$

кроме того, компоненты тензора  $\widehat{\mathbf{R}}$  являются элементами неотрицательной определенной матрицы, так как  $R_{ijkl} V_{kl} V_{ij} \geq 0$ .

Подставив далее указанные соотношения в уравнение (6.8), получим окончательную форму записи закона сохранения энергии в виде уравнения теплопроводности

$$\rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} = -T C_{ijkl} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{(T)}}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + R_{ijkl} V_{kl} V_{ij} + \rho r,$$

или

$$\rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} = -T \widehat{\mathbf{C}} \cdot \frac{\partial \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(T)}}{\partial T} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left( \widehat{\boldsymbol{\lambda}}^{(T)} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} T \right) + \widehat{\mathbf{V}}^T \cdot \widehat{\mathbf{R}} \cdot \widehat{\mathbf{V}} + \rho r. \quad (6.10)$$

Если рассматриваемая среда изотропна, то

$$R_{ijkl} = \lambda_D \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_D (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

и

$$\sigma_{ij}^D = \lambda_D V_{kk} \delta_{ij} + 2\mu_D V_{ij}. \quad (6.11)$$

Кроме того, если вязкие свойства среды не проявляются при относительном изменении бесконечно малого объема в окрестности рассматриваемой точки, т. е. выполняется условие Стокса (5.13), то связь между компонентами тензора вязких напряжений и компонентами тензора скоростей деформации принимает вид

$$\sigma_{ij}^D = 2\mu_D \left( V_{ij} - \frac{1}{3} V_{kk} \delta_{ij} \right).$$

Отметим, что третье слагаемое в правой части уравнения (6.10) имеет более высокий порядок малости по сравнению с другими и им при  $V_{ij} \rightarrow 0$  можно пренебречь.

Поскольку в общем случае

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}) + R_{ijkl} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t}, \quad (6.12)$$

то уравнения движения рассматриваемой термовязкоупругой сплошной среды имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( C_{ijkl} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \varepsilon_{kl}^{(T)} \right) + R_{ijkl} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \rho b_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (6.13)$$

Уравнения (6.13) несколько упрощаются, если среда изотропна и однородна. Тогда вместо (6.13) можно записать

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \mu_D \frac{\partial^2 \dot{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \\ + (\lambda_D + \mu_D) \frac{\partial^2 \dot{u}_j}{\partial x_j \partial x_i} + \rho b_i - (3\lambda + 2\mu) \alpha^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \mu \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{u} \nabla_{\mathbf{x}}) + (\lambda + \mu) \nabla_{\mathbf{x}} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}) + \mu_D \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\dot{\mathbf{u}} \nabla_{\mathbf{x}}) + \\ + (\lambda_D + \mu_D) \nabla_{\mathbf{x}} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{u}}) + \rho \mathbf{b} - (3\lambda + 2\mu) \alpha^{(T)} \nabla_{\mathbf{x}} T = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

где  $(\dot{\cdot}) = \partial(\cdot)/\partial t$ .

Для получения единственного решения системы дифференциальных уравнений (6.10), (6.13) или (6.14) используют краевые условия (4.14)–(4.17).

Рассмотрим более подробно вопрос о различии между вязкоупругим твердым телом и жидкостью. Интуитивно ясно, что упругая среда является твердым телом, а вязкая среда — жидкостью. Для вязкоупругой среды ситуация существенно сложнее, так как она проявляет признаки как упругого, так и вязкого поведения.



Будем различать жидкость и твердое тело с помощью следующего простого и нестрогого рассуждения. Пусть рассматриваемое термовязкоупругое тело изотропно и однородно. Тогда компоненты девиатора напряжений  $s_{ij}$  связаны с компонентами девиатора деформации  $e_{ij}$  и  $\dot{e}_{ij} = \partial e_{ij} / \partial t$ :

$$s_{ij} = 2\mu e_{ij} + 2\mu_D \dot{e}_{ij},$$

откуда

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left( s_{ij} - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\mu_D/\mu}\right) \frac{\partial s_{ij}}{\partial t'} dt' \right). \quad (6.15)$$

Для однородной вязкой жидкости при условии малой деформации компоненты девиатора скоростей совпадают с компонентами девиатора скоростей деформации,  $\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$ . Тогда

$$s_{ij} = 2\mu_D \dot{e}_{ij}.$$

Если  $\dot{e}_{ij} = 0$ , то для вязкоупругой среды  $s_{ij} = 2\mu e_{ij} \neq 0$ , а для вязкой жидкости  $s_{ij} = 0$ . Для полимерных материалов, если их рассматривать на микроуровне, различие между твердым телом и жидкостью достаточно простое. В жидкости отдельные цепи молекул не связаны между собой и за длительные промежутки времени обладают неограниченной подвижностью по отношению друг к другу. В твердом теле между цепями молекул имеются дискретные химические связи, которые называют поперечными, они-то и препятствуют неограниченному течению.

Положим, что в соотношениях (6.15) компоненты девиатора напряжений изменяются по закону

$$s_{ij} = s_{ij}^0 H(t),$$

где  $s_{ij}^0 = \text{const}$ ,  $H(t)$  — функция Хевисайда,  $H(t) = 1$  при  $t \geq 0$  и  $H(t) = 0$  при  $t < 0$ . Тогда, поскольку  $dH(t)/dt = \delta(t)$ ,  $\delta(t)$  — дельта-функция Дирака, по определению этой функции

$$\int_a^b f(\xi) \delta(\xi - \xi_0) d\xi = f(\xi_0) \quad \text{при} \quad \xi_0 \in [a, b],$$

где  $f(x)$  — произвольная функция, непрерывная в точке  $x = \xi_0$  и, следовательно,

$$\int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\mu_D/\mu}\right) \delta(t') dt' = \exp\left(-\frac{t}{\mu_D/\mu}\right).$$

Тогда

$$e_{ij} = \frac{s_{ij}^0}{2\mu} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right),$$

где  $\tau = \mu_D / \mu$  — время запаздывания, а  $\varphi(t) = 1 - \exp(-t/\tau)$  — функция ползучести. Эксперимент, в котором изучают изменение деформации во времени под действием постоянных напряжений, называют экспериментом на ползучесть, а само явление — ползучестью.

**6.2. Термовязкоупругая среда, зависящая от скорости изменения тензора напряжений.** Для получения уравнений, описывающих поведение термовязкоупругой среды с учетом скорости изменения тензора напряжений, введем в рассмотрение с помощью преобразования Лежандра термодинамический потенциал Гиббса:

$$\rho F(\sigma_{kl}, T, \vartheta_k) = -\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + \rho A(\varepsilon_{kl}, T, \vartheta_k), \quad (6.16)$$

аргументами которого являются тензор напряжений, абсолютная температура и градиент абсолютной температуры. Используя первый и второй законы термодинамики, можно показать, что

$$\varepsilon_{ij} = -\rho \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad h = -\frac{\partial F}{\partial T}, \quad \frac{\partial F}{\partial \vartheta_i} = 0.$$

Далее, включим в число аргументов основных определяющих функций — реактивных переменных — скорость изменения тензора напряжений  $\partial \hat{\sigma} / \partial t = \hat{\sigma}$ , т. е.

$$\begin{aligned} F &= F(\sigma_{kl}, \dot{\sigma}_{kl}, T, \vartheta_k), & h &= h(\sigma_{kl}, \dot{\sigma}_{kl}, T, \vartheta_k), \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}(\sigma_{kl}, \dot{\sigma}_{kl}, T, \vartheta_k), & q_i &= q_i(\sigma_{kl}, \dot{\sigma}_{kl}, T, \vartheta_k). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Неравенство (3.42), выражающее второй закон термодинамики, можно представить в виде

$$\rho \frac{\partial F}{\partial t} + \dot{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij} + \rho h \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{T} q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \geq 0,$$

или

$$\left( \rho \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} + \varepsilon_{ij} \right) \dot{\sigma}_{ij} + \rho \frac{\partial F}{\partial \dot{\sigma}_{ij}} \ddot{\sigma}_{ij} + \rho \left( \frac{\partial F}{\partial T} + h \right) \dot{T} + \rho \frac{\partial F}{\partial \vartheta_i} \dot{\vartheta}_i - \frac{1}{T} q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \geq 0. \quad (6.18)$$

Аналогично уравнениям (6.2) представим активные переменные в неравенстве (6.18) в виде суммы равновесной части, не зависящей от скорости изменения тензора напряжений, и диссипативной части, представляющей собой функцию скорости изменения тензора напряжений. Тогда, аналогично неравенству (6.3), получим

$$\begin{aligned} \left( \rho \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} + \left( \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}^D \right) \right) \dot{\sigma}_{ij} + \rho \frac{\partial F}{\partial \dot{\sigma}_{ij}} \ddot{\sigma}_{ij} + \rho \left( \frac{\partial F}{\partial T} + h \right) \dot{T} + \\ + \rho \frac{\partial F}{\partial \vartheta_i} \dot{\vartheta}_i - \frac{1}{T} q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \geq 0. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Это неравенство линейно по обобщенным скоростям  $\dot{\sigma}_{ij}$ ,  $\dot{T}$  и  $\dot{\vartheta}_i$ , которые, в соответствии с соотношениями (6.17), не являются реактивными

переменными. Следовательно, достаточными условиями выполнения неравенства (6.19) при произвольном допустимом термодинамическом процессе будут следующие:

$$\frac{\partial F^D}{\partial \dot{\sigma}_{ij}} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \theta_i} = 0, \quad h = -\frac{\partial F}{\partial T}, \quad \varepsilon_{ij}^0 = -\rho \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \delta - \frac{1}{T} q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \geq 0, \quad (6.20)$$

где диссипативная функция  $\delta = \varepsilon_{ij}^D \dot{\sigma}_{ij}$ .

Из ограничений (6.20) следует, что

$$\varepsilon_{ij} = -\rho \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} + \varepsilon_{ij}^D, \quad F^D = 0, \quad h^D = 0. \quad (6.21)$$

Используя первое равенство из (6.17) и определение термодинамического потенциала Гиббса (6.16), получаем закон сохранения энергии в виде

$$\rho T \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho r + \dot{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij}^D, \quad (6.22)$$

где, как и раньше, последнее слагаемое в правой части определяет необратимое тепловыделение, обусловленное вязким трением.

При малых скоростях изменения тензора напряжений  $\varepsilon_{ij}^D$  можно аппроксимировать линейной функцией:

$$\varepsilon_{ij}^D = D_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} + S_{ijk} \frac{\partial T}{\partial x_k},$$

где  $D_{ijkl}$  и  $S_{ijk}$  должны выбираться так, чтобы выполнялось неравенство из (6.20). Если по аналогии с неравенствами (6.6) положить, что механическая и тепловая диссипации энергии независимы и по отдельности неотрицательны, т. е.

$$\varepsilon_{ij}^D \dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} \dot{\sigma}_{ij} + S_{ijk} \frac{\partial T}{\partial x_k} \dot{\sigma}_{ij} \geq 0, \quad -q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \geq 0, \quad (6.23)$$

то из первого неравенства (6.23) следует, что в силу произвольности  $\partial T / \partial x_k$  и  $\dot{\sigma}_{ij}$  достаточное условие его выполнения —  $S_{ijk} = 0$ . Матрица, элементами которой являются компоненты  $D_{ijkl}$  тензора  $\hat{\mathbf{D}}$  коэффициентов текучести, является неотрицательно определенной, и  $D_{ijkl} = D_{klij}$ ,  $D_{ijkl} = D_{jikl}$ ,  $D_{ijkl} = D_{ijlk}$ .

Тогда из первого равенства (6.21) получим

$$\varepsilon_{ij} = -\rho \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} + D_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl}. \quad (6.24)$$

Дальнейшая конкретизация соотношения (6.24) связана с выбором функции  $F(\sigma_{ij}, T)$ . Однако представление этой функции в виде разложения в ряд Тейлора по степеням  $\sigma_{ij}$  некорректно, так как компоненты тензора напряжений совсем не обязательно удовлетворяют условию  $\|\sigma_{ij}\| \ll \ll 1$ , позволяющему в этом разложении ограничиться линейными по  $\sigma_{ij}$  слагаемыми. Поскольку представление объемной плотности свободной

энергии в виде (4.1) и следующего равенства имеет место для линейной термоупругой среды, то, учитывая (6.16), получаем

$$\begin{aligned} \rho F(\sigma_{kl}, T, \vartheta_k) = & -\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)})(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(T)}) + \\ & + \rho B(T) - \frac{1}{2}C_{ijkl}(-\varepsilon_{kl}^{(T)})(-\varepsilon_{ij}^{(T)}) = -\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} - \\ & - C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}^{(T)} + \rho B(T). \end{aligned} \quad (6.25)$$

Подставив соотношения (4.10) в (6.25) с учетом равенства

$$\hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{I}},$$

где  $\hat{\mathbf{I}}$  — единичный тензор четвертого ранга с компонентами  $I_{ijmn} = \frac{1}{2}(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm})$ , получаем выражение для объемной плотности термодинамического потенциала Гиббса:

$$\rho F(\sigma_{kl}, T, \vartheta_k) = -\frac{1}{2}B_{ijkl}\sigma_{kl}\sigma_{ij} - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{(T)} - \frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(T)}\varepsilon_{ij}^{(T)} + \rho B(T). \quad (6.26)$$

Массовая плотность энтропии  $h$  в соответствии с третьим равенством из (6.20) и соотношением (6.26) будет иметь вид

$$h = \left( \sigma_{ij}\alpha_{ij}^{(T)} + C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(T)}\alpha_{ij}^{(T)} \right) \frac{1}{\rho} - \frac{\partial B}{\partial T}, \quad (6.27)$$

где, как и ранее,  $\alpha_{ij}^{(T)} = \partial\varepsilon_{ij}^{(T)}/\partial T = \text{const}$ .

Подставляя затем равенство (6.27) в выражение закона сохранения энергии (6.22), находим

$$\begin{aligned} \left( -\rho T \frac{\partial^2 B}{\partial T^2} + T C_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)} \alpha_{ij}^{(T)} \right) \frac{\partial T}{\partial t} = \\ = -T \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} \alpha_{ij}^{(T)} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho r + D_{ijkl} \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial t} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Если обозначить, как и в уравнении (4.11),  $c_\sigma = c_\varepsilon + T C_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)} \alpha_{ij}^{(T)}$ , где  $c_\varepsilon = -T \partial^2 B / \partial T^2$ , и принять связь между компонентами вектора плотности теплового потока и градиента температуры в форме закона Фурье (4.7), то закон сохранения энергии принимает вид уравнения теплопроводности, в котором учтена связь между полями температуры и напряжений:

$$c_\sigma \frac{\partial T}{\partial t} = -T \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} \alpha_{ij}^{(T)} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \rho r + D_{ijkl} \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial t} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t}. \quad (6.28)$$

Так как рассматриваемая модель термовязкоупругой среды линейна, то последним слагаемым в правой части уравнения (6.28) можно пренебречь.

Граничные и начальные условия различных задач, которые могут быть смоделированы при помощи полученных соотношений, задают зависимости (4.14)–(4.17).

Отметим, что связь между компонентами тензоров деформации и напряжений вида

$$\varepsilon_{ij} = B_{ijkl}\sigma_{kl} + D_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} + \varepsilon_{ij}^{(T)}, \quad \text{или} \quad \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \widehat{\mathbf{B}} \cdot \widehat{\boldsymbol{\sigma}} + \widehat{\mathbf{D}} \cdot \dot{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}} + \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(T)}, \quad (6.29)$$

определяет модель Максвелла.

Рассмотрим модель Максвелла применительно к изотропной среде. В этом случае

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left( \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) + \frac{1}{2D_2} \left( \dot{\sigma}_{ij} - \frac{D_1}{3D_1 + 2D_2} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} \right) + \varepsilon^{(T)} \delta_{ij}, \quad (6.30)$$

где учтено, что для изотропной среды  $D_{ijkl} = D_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + D_2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ .

Связь между девиаторами деформации и напряжений, как следует из равенства (6.30), имеет вид

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu} s_{ij} + \frac{1}{2D_2} \dot{s}_{ij},$$

откуда

$$s_{ij} = 2\mu \left( e_{ij} - \int_0^t \exp \left( -\frac{t-t'}{\mu/D_2} \right) \frac{\partial e_{ij}}{\partial t'} dt' \right). \quad (6.31)$$

Если положить, что в соотношениях (6.31) компоненты девиатора деформации изменяются по закону

$$e_{ij} = e_{ij}^0 H(t),$$

где  $e_{ij}^0 = \text{const}$ , то в таком случае

$$s_{ij} = 2\mu e_{ij} \left( 1 - \exp \left( -\frac{t}{\tau} \right) \right)$$

и  $\tau = \mu/D_2$  — время запаздывания, а  $\psi(t) = 1 - \exp(-t/\tau)$  — функция релаксации. Эксперимент, в котором изучают изменение напряжений во времени под действием постоянной деформации, называют экспериментом на релаксацию, а само явление — релаксацией напряжений.

### 6.3. Термовязкоупругая среда с внутренним параметром состояния.

Один из возможных вариантов получения соотношений теории термовязкоупругости базируется на использовании модели среды с внутренним параметром состояния. Положим, что при описании такой среды можно использовать тензорный внутренний параметр  $\widehat{\boldsymbol{\chi}}$  с компонентами  $\chi_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Кинетические уравнения, описывающие изменение во времени  $\chi_{ij}$ , в линейном приближении примем в виде

$$\tau_\sigma \dot{\chi}_{ij} = \bar{\chi}_{ij} - \chi_{ij}, \quad (6.32)$$

где  $\tau_\sigma$  — время релаксации внутреннего параметра состояния;  $\bar{\chi}_{ij}$  — его установившееся значение.

Так как уравнения (6.32) линейны, то

$$\chi_{ij} = \bar{\chi}_{ij} - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_\sigma}\right) \frac{\partial \bar{\chi}_{ij}}{\partial t'} dt'. \quad (6.33)$$

Выражение для объемной плотности свободной энергии зададим аналогично (4.40), но с учетом малости внутреннего параметра, т. е.  $\|\chi_{ij}\| \ll 1$ :

$$\begin{aligned} \rho A(\varepsilon_{kl}, T, \chi_{kl}) &= \frac{1}{2} C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}) (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(T)}) - H_{ijkl} \chi_{kl} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(T)}) + \\ &+ \frac{1}{2} K_{ijkl} \chi_{kl} \chi_{ij} + \rho B(T) - \frac{1}{2} C_{ijkl} (-\varepsilon_{kl}^{(T)}) (-\varepsilon_{ij}^{(T)}), \quad (6.34) \\ A(0, T_0, 0) &= 0, \quad B(T_0) = 0. \end{aligned}$$

Соотношения для компонентов тензора напряжений и массовой плотности энтропии следуют из равенства (6.34) с учетом первых двух равенств (3.51):

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}) - H_{ijkl} \chi_{kl}, \quad (6.35)$$

$$h = \frac{1}{\rho} (C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - H_{ijkl} \chi_{kl}) \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{(T)}}{\partial T} - \frac{\partial B}{\partial T}. \quad (6.36)$$

Соотношение (6.36) дает возможность получить уравнение закона сохранения энергии в виде уравнения теплопроводности, аналогичного уравнению (3.53):

$$-\rho T \frac{\partial^2 B}{\partial T^2} \frac{\partial T}{\partial t} = -T \left( C_{ijkl} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t} - H_{ijkl} \frac{\partial \chi_{kl}}{\partial t} \right) \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{(T)}}{\partial T} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho r + \delta, \quad (6.37)$$

где диссипативная функция

$$\delta = -\rho \frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}} \frac{\partial \chi_{ij}}{\partial t} = (K_{ijkl} \chi_{kl} - H_{ijkl} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(T)})) \frac{\partial \chi_{kl}}{\partial t}.$$

Дальнейшая конкретизация уравнений (6.35) и (6.37) связана с выбором функции  $\bar{\chi}_{ij} = \bar{\chi}_{ij}(\varepsilon_{kl}, T, \vartheta_k)$ . Поскольку мы рассматриваем линейную термовязкоупругую среду, то положим, что  $\bar{\chi}_{ij}$  — линейная функция своих аргументов:

$$\bar{\chi}_{ij} = X_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \gamma_{ij} (T - T_0) + F_{ijk} \vartheta_k. \quad (6.38)$$

Уравнение (3.32) с учетом выражения (6.38) принимает вид

$$\dot{\chi}_{ij} = \frac{1}{\tau_\sigma} (X_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \gamma_{ij} (T - T_0) + F_{ijk} \vartheta_k - \chi_{ij}). \quad (6.39)$$

Подставляя уравнение (6.39) в неравенство (3.57), получим

$$\begin{aligned} (K_{ijkl} \chi_{kl} - H_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)})) (X_{ijmn} \varepsilon_{mn} + \gamma_{ij} (T - T_0) + F_{ijm} \vartheta_m - \chi_{ij}) \frac{1}{\tau_\sigma} + \\ + \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{q_i}{T} \leq 0. \quad (6.40) \end{aligned}$$

Полагая далее, что процессы деформирования и изменения внутреннего структурного параметра связаны между собой и не зависят от изменения температуры и распространения теплоты, получим достаточные условия выполнения неравенства (6.40):

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} = 0, \quad F_{ijm} = 0, \\ K_{ijkl} X_{ijmn} \varepsilon_{mn} \chi_{kl} \leq 0, \quad -K_{ijkl} \chi_{kl} \chi_{ij} \leq 0, \quad H_{ijkl} \chi_{ij} \varepsilon_{kl} \leq 0, \\ -H_{ijkl} X_{ijmn} \varepsilon_{mn} \varepsilon_{kl} \leq 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x_i} q_i \leq 0. \end{aligned} \quad (6.41)$$

С учетом первых двух равенств из (6.41) установившиеся значения внутреннего параметра состояния имеют вид

$$\bar{\chi}_{ij} = X_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (6.42)$$

Если положить, что при распространении теплоты имеют место закон теплопроводности Фурье (4.7) и равенство  $\alpha_{ij}^{(T)} = \partial \varepsilon_{ij}^{(T)} / \partial T$ , то уравнение (6.37) окончательно принимает вид

$$\rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} = -T \left( C_{ijkl} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t} - H_{ijkl} \frac{\partial \chi_{kl}}{\partial t} \right) \alpha_{ij}^{(T)} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \rho r + \delta. \quad (6.43)$$

Равенство (6.33) дает возможность записать связь между компонентами тензоров напряжений и деформации в виде

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}) - R_{ijkl} \left( \varepsilon_{kl} - \int_0^t \exp \left( -\frac{t-t'}{\tau_\sigma} \right) \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t'} dt' \right), \quad (6.44)$$

где  $R_{ijkl} = H_{ijmn} X_{mnlk}$  — компоненты симметричного тензора коэффициентов вязкости  $\mathbf{R}$ ,  $R_{ijkl} = R_{klij}$ ,  $R_{ijkl} = R_{jikl}$ ,  $R_{ijkl} = R_{ijlk}$ ; отметим, что если продифференцировать (6.44) по времени, полученный результат умножить на  $\tau_\sigma$  и сложить с (6.44), то получим выражение

$$\tau_\sigma \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + \sigma_{ij} = \tau_\sigma C_{ijkl} \left( \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t} - \alpha_{kl}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial t} \right) - R_{ijkl} \varepsilon_{kl} + C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}). \quad (6.45)$$

Соотношения (6.43) и (6.45) определяют *стандартную линейную среду*.

Подставив соотношения (6.44) в уравнения закона сохранения количества движения (3.11), получим уравнения движения термовязкоупругой среды в перемещениях. Для изотропной и однородной среды эти уравнения имеют вид

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \rho b_i - (3\lambda + 2\mu) \alpha^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_i} -$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \mu_D \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda_D + \mu_D) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} - \mu_D \int_0^t \exp \left( -\frac{t-t'}{\tau_\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} dt' - \right. \\
& \quad \left. (\lambda_D + \mu_D) \int_0^t \exp \left( -\frac{t-t'}{\tau_\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} dt' \right) = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
& \mu \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{u} \nabla_{\mathbf{x}}) + (\lambda + \mu) \nabla_{\mathbf{x}} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{b} - (3\lambda + 2\mu) \alpha^{(T)} \nabla_{\mathbf{x}} T - \\
& \quad - \left( \mu_D \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{u} \nabla_{\mathbf{x}}) + (\lambda_D + \mu_D) \nabla_{\mathbf{x}} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}) - \right. \\
& \quad \left. - \mu_D \int_0^t \exp \left( -\frac{t-t'}{\tau_\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial t'} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{u} \nabla_{\mathbf{x}})) dt' - \right. \\
& \quad \left. - (\lambda_D + \mu_D) \int_0^t \exp \left( -\frac{t-t'}{\tau_\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial t'} (\nabla_{\mathbf{x}} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u})) dt' \right) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (6.46)
\end{aligned}$$

Для получения единственного решения системы уравнений (6.43) и (6.46) используют краевые условия (4.14)–(4.17).

Условия на поверхности разрыва в рассматриваемой термовязкоупругой сплошной среде можно получить, если положить, что отклонение абсолютной температуры от температуры естественного состояния невелико:  $|T - T_0|/T_0 \ll 1$ . Предполагая также, что возмущения в однородной среде распространяются со скоростью  $\mathbf{D}$  из закона сохранения количества движения (3.11) получаем

$$-\rho [\dot{u}_i] D - n_j [\sigma_{ij}] = 0, \quad (6.47)$$

а из соотношений Коши —

$$-[\varepsilon_{ij}] D = \frac{1}{2} ([\dot{u}_i] n_j + [\dot{u}_j] n_i). \quad (6.48)$$

Из закона сохранения энергии в виде (6.37) при  $T \approx T_0$  и  $\delta = 0$  следует условие

$$\rho c_\varepsilon [T] D = -T_0 (C_{ijkl} [\varepsilon_{kl}] D - H_{ijkl} [\chi_{kl}] D) \alpha_{ij}^{(T)} + [q_i] n_i. \quad (6.49)$$

Для компонентов вектора плотности теплового потока и соотношений (6.35) условия на поверхности разрыва имеют вид

$$\lambda_{ij}^{(T)} [T] n_j = 0, \quad [\sigma_{ij}] D = C_{ijkl} ([\varepsilon_{kl}] - \alpha_{kl}^{(T)} [T]) D - H_{ijkl} [\chi_{kl}] D, \quad (6.50)$$

причем из первого равенства системы (6.50) вытекает, что поскольку в общем случае  $\lambda_{ij}^{(T)} n_j \neq 0$ , то абсолютная температура непрерывна,  $[T] = 0$  и скорость распространения теплоты бесконечна.



Из уравнений (6.32) и (6.42) следует, что

$$-\tau_\sigma [\chi_{ij}]D = X_{ijkl} ([u_k]n_l + [u_l]n_k) / 2.$$

Наконец, объединяя последнее равенство, соотношения (6.47), (6.48) и второе равенство из (6.50), получим

$$-\rho [\dot{u}_i]D^2 + C_{ijkl} [\dot{u}_k]n_j n_l - R_{ijkl} [u_k]n_j n_l / \tau_\sigma = 0,$$

или

$$(-\rho D^2 \delta_{ik} + C_{ijkl} n_j n_l) [\dot{u}_k] - R_{ijkl} [u_k]n_j n_l / \tau_\sigma = 0. \quad (6.51)$$

Соотношения (6.51) представляют собой систему трех однородных линейных алгебраических уравнений с шестью неизвестными  $[\dot{u}_k]$  и  $[u_k]$ . Так как в общем случае ранг матрицы этой системы не больше числа уравнений, неизвестные величины скачков могут быть определены с точностью до некоторых постоянных множителей. Если из решения краевой задачи термовязкоупругости с соответствующими граничными и начальными условиями определены скачки  $[\dot{u}_k]$ , то скачки компонентов вектора перемещения могут быть найдены из равенств (6.51). Скорости распространения скачков  $[\dot{u}_k]$  определяют из равенства

$$\det(-\rho D^2 \delta_{ik} + C_{ijkl} n_j n_l) = 0, \quad (6.52)$$

которое совпадает с полученным ранее равенством (4.22).

Отметим, что компоненты вектора плотности теплового потока разрывны при переходе через поверхность разрыва. Величина  $[q_i]$  может быть определена из соотношения, являющегося комбинацией равенств (6.47)–(6.50):

$$\rho [\dot{u}_i] \alpha_{ij}^{(T)} T_0 D^2 = -[q_i] n_i n_j.$$

Очевидно, что правая часть последнего равенства отлична от нуля только в том случае, когда  $i = j$ .

**6.4. Термовязкоупругая среда с памятью.** При построении определяющих соотношений линейной термовязкоупругой среды с памятью будем полагать, что функции  $\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3, t)$  и  $T(x_1, x_2, x_3, t)$  непрерывны на интервале  $-\infty < t < \infty$  и, кроме того,  $\varepsilon_{ij}(t) \rightarrow 0$  и  $T(t) \rightarrow T_0$  при  $t \rightarrow -\infty$ . При таких предположениях о непрерывности действительный непрерывный скалярный или тензорный функционал от  $\varepsilon_{ij}(t')$  и  $T(t')$  при  $t' \in (-\infty, t]$  можно равномерно приблизить полиномом на множестве действительных непрерывных функционалов от  $\varepsilon_{ij}(t')$  и  $T(t')$ . Эти функционалы можно выразить через интегралы Стильтьеса, в которых подынтегральные функции имеют ограниченную вариацию. Обозначим  $\theta(t) = T(t) - T_0$  и положим, что  $|\theta(t)|/T_0 \ll 1$ . Полиномиальное разложение объемной плотности свободной энергии относительно этих

линейных функционалов дает форму

$$\begin{aligned} \rho A[\widehat{\mathbf{\Lambda}}(t), \widehat{\mathbf{\Lambda}}^t(s)] = & \int_{-\infty}^t D_{ij}(t-t') \frac{\partial \varepsilon_{ij}(t')}{\partial t'} dt' - \int_{-\infty}^t \psi(t-t') \frac{\partial \theta(t')}{\partial t'} dt' + \\ & + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t R_{ijkl}(t-t', t-t'') \frac{\partial \varepsilon_{ij}(t')}{\partial t'} \frac{\partial \varepsilon_{kl}(t'')}{\partial t''} dt' dt'' - \\ & - \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \beta_{ij}(t-t', t-t'') \frac{\partial \varepsilon_{ij}(t')}{\partial t'} \frac{\partial \theta(t'')}{\partial t''} dt' dt'' + \\ & + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t m(t-t', t-t'') \frac{\partial \theta(t')}{\partial t'} \frac{\partial \theta(t'')}{\partial t''} dt' dt'', \quad (6.53) \end{aligned}$$

где подынтегральные функции, характеризующие механические свойства, полагаются непрерывными по аргументам  $t-t' \geq 0$ ,  $t-t'' \geq 0$  и тождественно равными нулю при  $t-t' < 0$ ,  $t-t'' < 0$ , т.е.  $D_{ij}(t-t') = 0$ ,  $\psi(t-t') = 0$ ,  $R_{ijkl}(t-t', t-t'') = 0$ ,  $\beta_{ij}(t-t', t-t'') = 0$ ,  $m(t-t', t-t'') = 0$  при  $t-t' < 0$ ,  $t-t'' < 0$ . Заметим, что подынтегральные функции в соотношении (6.53) не должны зависеть от деформации и температуры.

Если подставить в уравнение закона сохранения энергии (4.32) соотношение (3.45) и полученный результат вычтесть из неравенства (3.42), то неравенство Клаузиуса–Дюгема примет вид

$$-\rho h \frac{\partial \theta}{\partial t} - \rho \frac{\partial A}{\partial t} + \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} - \frac{1}{T} q_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \geq 0. \quad (6.54)$$

Подставляя затем соотношения (6.53) в неравенство (6.54), получим

$$\begin{aligned} & \left( -D_{ij}(0) - \int_{-\infty}^t R_{ijkl}(t-t', 0) \frac{\partial \varepsilon_{kl}(t')}{\partial t'} dt' + \right. \\ & \quad \left. + \int_{-\infty}^t \beta_{ij}(0, t-t') \frac{\partial \theta(t')}{\partial t'} dt' + \sigma_{ij} \right) \frac{\partial \varepsilon_{ij}(t)}{\partial t} + \\ & + \left( \psi(0) - \int_{-\infty}^t m(t-t', 0) \frac{\partial \theta(t')}{\partial t'} dt' + \int_{-\infty}^t \beta_{ij}(t-t', 0) \frac{\partial \varepsilon_{ij}(t')}{\partial t'} dt' - \rho h \right) \frac{\partial \theta(t)}{\partial t} + \\ & + \left( - \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} D_{ij}(t-t') \frac{\partial \varepsilon_{ij}(t')}{\partial t'} dt' + \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} \psi(t-t') \frac{\partial \theta(t')}{\partial t'} dt' + \delta - \frac{1}{T} q_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) \geq 0, \quad (6.55) \end{aligned}$$

где диссипативная функция

$$\begin{aligned} \delta = & -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} R_{ijkl}(t-t', t-t'') \frac{\partial \varepsilon_{ij}(t')}{\partial t'} \frac{\partial \varepsilon_{kl}(t'')}{\partial t''} dt' dt'' + \\ & + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} \beta_{ij}(t-t', t-t'') \frac{\partial \varepsilon_{ij}(t')}{\partial t'} \frac{\partial \theta(t'')}{\partial t''} dt' dt'' - \\ & - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} m(t-t', t-t'') \frac{\partial \theta(t')}{\partial t'} \frac{\partial \theta(t'')}{\partial t''} dt' dt'' \quad (6.56) \end{aligned}$$

и использованы свойства симметрии

$$\begin{aligned} R_{ijkl}(t-t', t-t'') &= R_{ijkl}(t-t'', t-t'), \\ m(t-t', t-t'') &= m(t-t'', t-t'). \end{aligned}$$

Поскольку неравенство (6.55) должно выполняться при любых значениях  $\dot{\varepsilon}_{ij}(t)$  и  $\dot{\theta}(t)$ , достаточно, чтобы коэффициенты при  $\dot{\varepsilon}_{ij}(t)$  и  $\dot{\theta}(t)$  обращались в нуль. Тогда

$$\sigma_{ij} = D_{ij}(0) + \int_{-\infty}^t R_{ijkl}(t-t', 0) \frac{\partial \varepsilon_{kl}(t')}{\partial t'} dt' - \int_{-\infty}^t \beta_{ij}(0, t-t') \frac{\partial \theta(t')}{\partial t'} dt', \quad (6.57)$$

$$\rho h = \psi(0) + \int_{-\infty}^t \beta_{ij}(t-t', 0) \frac{\partial \varepsilon_{ij}(t')}{\partial t'} dt' - \int_{-\infty}^t m(t-t', 0) \frac{\partial \theta(t')}{\partial t'} dt'. \quad (6.58)$$

Равенства (6.57) и (6.58) являются определяющими соотношениями для тензора напряжений и объемной плотности энтропии. Из них видно, что  $D_{ij}(0)$  и  $\psi(0)$  представляют собой начальные значения компонентов тензора напряжений и объемной плотности энтропии. Однако поскольку мы полагаем, что естественное состояние рассматриваемой сплошной среды и является начальным, то  $D_{ij}(0) = 0$  и  $\psi(0) = 0$ . Функции  $R_{ijkl}(t-t', 0)$ ,  $\beta_{ij}(0, t-t')$ ,  $\beta_{ij}(t-t', 0)$  и  $m(t-t', 0)$  — функции релаксации, определяющие термомеханические свойства рассматриваемой сплошной среды.

Неравенство (6.55) с учетом равенств (6.57) и (6.58) принимает более простой вид:

$$-\int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} D_{ij}(t-t') \frac{\partial \varepsilon_{ij}(t')}{\partial t'} dt' + \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} \psi(t-t') \frac{\partial \theta(t')}{\partial t'} dt' + \delta - \frac{1}{T} q_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \geq 0. \quad (6.59)$$

Если рассматривать процесс, для которого  $\partial\theta/\partial x_i = 0$ , то из неравенства (6.57) получим

$$- \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} D_{ij}(t-t') \frac{\partial \varepsilon_{ij}(t')}{\partial t'} dt' + \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} \psi(t-t') \frac{\partial \theta(t')}{\partial t'} dt' + \delta \geq 0 \quad (6.60)$$

и далее, так как первые два слагаемых в левой части неравенства (6.60) имеют первый порядок малости по реактивным переменным, а последнее — второй, то это неравенство можно заменить на два:

$$- \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} D_{ij}(t-t') \frac{\partial \varepsilon_{ij}(t')}{\partial t'} dt' + \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} \psi(t-t') \frac{\partial \theta(t')}{\partial t'} dt' \geq 0 \quad \text{и} \quad \delta \geq 0.$$

Следовательно, для выполнения первого из этих неравенств для всех возможных процессов необходимо следующее:

$$\frac{\partial D_{ij}(t)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = 0,$$

а с учетом нулевого закона термодинамики:

$$D_{ij}(t) = 0 \quad \text{и} \quad \psi(t) = 0. \quad (6.61)$$

Окончательно общее диссипативное неравенство для рассматриваемой среды имеет вид

$$\delta - \frac{1}{T} q_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \geq 0, \quad (6.62)$$

где диссипативная функция определена соотношением (6.56).

Равенства (6.57), (6.58) и (6.61) дают возможность записать закон сохранения энергии следующим образом:

$$\begin{aligned} -T \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^t m(t-t', 0) \frac{\partial \theta(t')}{\partial t'} dt' + T \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^t \beta_{ij}(t-t', 0) \frac{\partial \varepsilon_{ij}(t')}{\partial t'} dt' = \\ = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho r + \delta. \end{aligned} \quad (6.63)$$

Для приведения закона сохранения энергии (6.63) к иной форме — уравнению теплопроводности — необходимо конкретизировать выражение для компонентов вектора плотности теплового потока, приняв их, например, в виде

$$q_i = - \int_{-\infty}^t \lambda_{ij}^{(T)}(t-t') \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial \theta(t')}{\partial x_j} dt', \quad (6.64)$$

где  $q_i$  линейно зависят от истории градиента температуры  $\partial\theta/\partial x_j$ . Подставляя соотношения (6.64) в (6.62) и учитывая неравенство  $\delta \geq 0$ , получаем

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_i} \int_{-\infty}^t \lambda_{ij}^{(T)}(t-t') \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial\theta(t')}{\partial x_j} dt' \geq 0. \quad (6.65)$$

При фиксированном значении времени  $t$  мгновенное значение градиента температуры и значение функционала могут иметь в общем случае противоположные знаки, так как функционал зависит от всей прошлой истории градиента температуры. Для заданного момента времени функция  $\partial\theta/\partial x_i$  и функционал будут иметь один знак лишь в том случае, когда матрица с элементами  $\lambda_{ij}^{(T)}$  является неотрицательно определенной и не изменяется во времени. При этих условиях соотношение (6.64) сводится к закону Фурье:

$$q_i = -\lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial\theta}{\partial x_j},$$

а уравнение теплопроводности принимает, как следует из (6.63), вид

$$\begin{aligned} -T \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^t m(t-t', 0) \frac{\partial\theta(t')}{\partial t'} dt' + T \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^t \beta_{ij}(t-t', 0) \frac{\partial\varepsilon_{ij}(t')}{\partial t'} dt' = \\ = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial\theta}{\partial x_j} \right) + \rho r + \delta, \end{aligned} \quad (6.66)$$

причем второе слагаемое в его левой части характеризует термомеханическую связанность полей температуры и деформации.

Для изотропной термовязкоупругой среды с памятью

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = \int_{-\infty}^t R_1(t-t', 0) \frac{\partial\varepsilon_{kk}(t')}{\partial t'} dt' \delta_{ij} + 2 \int_{-\infty}^t R_2(t-t', 0) \frac{\partial\varepsilon_{ij}(t')}{\partial t'} dt' - \\ - \int_{-\infty}^t \beta(0, t-t') \frac{\partial\theta(t')}{\partial t'} dt' \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (6.67)$$

$$\begin{aligned} \delta = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} R_1(t-t', t-t'') \frac{\partial\varepsilon_{ii}(t')}{\partial t'} \frac{\partial\varepsilon_{kk}(t'')}{\partial t''} dt' dt'' - \\ - \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} R_2(t-t', t-t'') \frac{\partial\varepsilon_{ij}(t')}{\partial t'} \frac{\partial\varepsilon_{ij}(t'')}{\partial t''} dt' dt'' + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} \beta(t-t', t-t'') \frac{\partial \varepsilon_{kk}(t')}{\partial t'} \frac{\partial \theta(t'')}{\partial t''} dt' dt'' - \\
& - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} m(t-t', t-t'') \frac{\partial \theta(t')}{\partial t'} \frac{\partial \theta(t'')}{\partial t''} dt' dt''. \quad (6.68)
\end{aligned}$$

Очевидно, что уравнение теплопроводности для изотропной среды с памятью легко можно получить, если положить  $\beta_{ij}(t-t', 0) = \beta(t-t', 0)\delta_{ij}$  и  $\lambda_{ij}^{(T)} = \lambda^{(T)}\delta_{ij}$ .

Уравнения движения в перемещениях для рассматриваемой сплошной среды можно получить, подставив соотношения (6.57) в уравнения закона сохранения количества движения (3.11). Для нахождения единственного решения системы уравнений термовязкоупругой среды с памятью используют краевые условия (4.14)–(4.17).

**6.5. Ограничения на функции релаксации и частные случаи термовязкоупругой среды с памятью.** Рассмотрим некоторые следствия из общего диссипативного неравенства (6.62) для изотропной среды, полагая истории деформации и температуры функциями времени вида

$$\varepsilon_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}^0 H(t), \quad \theta(t) = \theta^0 H(t), \quad (6.69)$$

где  $\varepsilon_{ij}^0 = \text{const}$ ,  $\theta^0 = \text{const}$ ,  $H(t)$ , как и ранее, — функция Хевисайда.

Подставляя соотношения (6.69) в выражение (6.68) при условии  $e_{ij}^0 = \varepsilon_{ij}^0 - \varepsilon_{kk}^0 \delta_{ij}/3$ , где  $e_{ij}^0 = \text{const}$  — компоненты девизатора деформации, получаем

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} R_0(t, t) \varepsilon_{ii}^0 \varepsilon_{kk}^0 - \frac{\partial}{\partial t} R_2(t, t) e_{ij}^0 e_{ij}^0 + \frac{\partial}{\partial t} \beta(t, t) \varepsilon_{kk}^0 \theta^0 - \\
& - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} m(t, t) (\theta^0)^2 \geq 0, \quad (6.70)
\end{aligned}$$

где  $R_0(t, t) = R_1(t, t) + 2R_2(t, t)/3$ .

При  $e_{ij}^0 = 0$  и неравных одновременно нулю  $\varepsilon_{kk}^0$  и  $\theta^0$  из неравенства (6.70) следуют ограничения

$$\frac{\partial}{\partial t} R_0(t, t) \leq 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} m(t, t) \leq 0. \quad (6.71)$$

Далее преобразуем левую часть неравенства (6.70) и приведем его к виду ( $e_{ij}^0 = 0$ )

$$\begin{aligned}
& 2\varepsilon_{kk}^0 \theta^0 \left( \frac{\partial}{\partial t} \beta(t, t) - \sqrt{\frac{\partial}{\partial t} R_0(t, t) \frac{\partial}{\partial t} m(t, t)} \right) \geq \\
& \geq - \left( \sqrt{-\frac{\partial}{\partial t} R_0(t, t) \varepsilon_{kk}^0} + \sqrt{-\frac{\partial}{\partial t} m(t, t) \theta^0} \right)^2,
\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\beta(t, t)\right)^2 \leq \left(\frac{\partial}{\partial t}R_0(t, t)\right) \left(\frac{\partial}{\partial t}m(t, t)\right). \quad (6.72)$$

Другой частный случай соответствует  $\theta^0 = 0$  и  $\varepsilon_{kk}^0 = 0$ . Для этого случая неравенство (6.70) дает

$$\frac{\partial}{\partial t}R_2(t, t) \leq 0. \quad (6.73)$$

Еще один частный случай касается связи температурного коэффициента линейного расширения  $\alpha^{(T)}$  с механическими свойствами материала. Пусть свободный от напряжений образец находится в однородном поле температуры

$$\theta(t) = \theta^0 H(t), \quad \theta^0 = \text{const}.$$

При таком законе изменения температуры из равенства (6.67) следует

$$\int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} (3R_0(t-t', 0)) \frac{\partial \varepsilon_{kk}(t')}{\partial t} dt' = 3\beta(0, t)\theta^0. \quad (6.74)$$

Далее, если  $\beta(0, t)$  можно представить в виде

$$\beta(0, t) = \alpha^{(T)}(3R_0(t, 0)), \quad (6.75)$$

где  $\alpha^{(T)} = \text{const}$ , то решение уравнения (6.74) будет иметь вид

$$\varepsilon_{kk} = 3\alpha^{(T)}\theta^0 H(t). \quad (6.76)$$

В общем случае соотношение (6.75) не имеет места. Тогда зависимость (6.76) относительного изменения объема от температуры нельзя выразить через независящий от времени температурный коэффициент линейного расширения.

Рассмотрим далее требование неотрицательности работы, широко используемое в механике сплошной среды, и его связь с соотношениями (6.71)–(6.73), следующими из законов термодинамики необратимых процессов. Требование неотрицательности работы для изотермического деформирования вязкоупругой среды формулируют в виде

$$\int_0^t \sigma_{ij}(t') \frac{\partial \varepsilon_{ij}(t')}{\partial t'} dt' \geq 0, \quad (6.77)$$

где нулевому моменту времени соответствует естественное состояние.

При изотермических условиях ( $\partial\theta/\partial t = 0$  и  $\partial\theta/\partial x_i = 0$ ) неравенство (6.54) принимает вид

$$-\rho \frac{\partial A}{\partial t} + \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} \geq 0, \quad (6.78)$$

или, после интегрирования по времени,

$$-\rho A + \int_0^t \sigma_{ij}(t') \frac{\partial \varepsilon_{ij}(t')}{\partial t'} dt' \geq 0. \quad (6.79)$$

Так как левая часть неравенства (6.78) в рассматриваемых условиях есть диссипативная функция  $\delta \geq 0$ , то

$$\int_0^t \delta(t') dt' \geq 0, \quad (6.80)$$

т. е. общая рассеянная энергия в окрестности рассматриваемой точки должна быть неотрицательна.

Если потребовать, чтобы объемная плотность свободной энергии была неотрицательна, т. е.  $\rho A \geq 0$ , то неравенство (6.79) дает необходимое, но не достаточное условие неотрицательности работы. Достаточное условие заключается в том, чтобы выполнялось также неравенство (6.80). Однако при этом, если одновременно потребовать неотрицательности затраченной работы и диссипации энергии, то о знаке  $\rho A$  ничего сказать нельзя. Принимая требование  $\delta \geq 0$ , откуда следует неравенство (6.80), мы видим, что условие  $\rho A \geq 0$  приводит к неотрицательности работы, однако из неотрицательности работы не следует  $\rho A \geq 0$ . В силу этого можно предположить, что требование  $\rho A \geq 0$  является более жестким и более физически содержательным, чем требование неотрицательности работы.

Из требования неотрицательности объемной плотности свободной энергии следуют некоторые выводы. Для их получения используем функцию Хевисайда в выражении объемной плотности свободной энергии изотропной термовязкоупругой среды для изотермического процесса в виде

$$\begin{aligned} \rho A = & \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t R_0(t-t', t-t'') \frac{\partial \varepsilon_{ii}(t')}{\partial t'} \frac{\partial \varepsilon_{kk}(t'')}{\partial t''} dt' dt'' + \\ & + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t R_2(t-t', t-t'') \frac{\partial e_{ij}(t')}{\partial t'} \frac{\partial e_{ij}(t'')}{\partial t''} dt' dt''. \end{aligned} \quad (6.81)$$

Если положить, что  $R_0(t', t'') = R_0(t' + t'')$  и  $R_2(t', t'') = R_2(t' + t'')$ ,  $\varepsilon_{ii}(t) = \varepsilon_{ii}^0 H(t)$  и  $e_{ij}(t) = e_{ij}^0 H(t)$ , то требование  $\rho A \geq 0$  принимает вид

$$R_0(t) \geq 0, \quad R_2(t) \geq 0. \quad (6.82)$$

Полученные требования, наложенные на функции релаксации  $R_0(t)$  и  $R_2(t)$ , показывают, что при условиях (6.71) и (6.73) функции релаксации должны быть неотрицательными непрерывно убывающими функциями времени. Принцип затухающей памяти накладывает дополнительные требования на производные функции релаксации по времени, а именно,  $\partial^2 R_0(t)/\partial t^2 \geq 0$  и  $\partial^2 R_2(t)/\partial t^2 \geq 0$ .



## 7. ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ СПЛОШНАЯ СРЕДА

**7.1. Условия текучести и условия упрочнения.** Характерной особенностью упругой среды является полное восстановление формы и объема деформируемого тела после снятия приложенной к нему нагрузки. Если же приложенная внешняя нагрузка такова, что в деформируемом твердом теле на микроуровне возникают необратимые смещения вследствие взаимодействия дислокаций, относительного скольжения кристаллографических плоскостей и других явлений и после снятия этой нагрузки не происходит возврат к исходной конфигурации, то в этом случае деформации называют *пластическими*.

Различные материалы ведут себя за пределами упругости по-разному. Их поведение зависит от структуры материала, условий его работы в конструкции и приложенной нагрузки. Изучение пластических свойств среды начинают с проведения одноосных испытаний образцов, как правило, на растяжение. Получаемые в результате испытаний диаграммы деформирования затем аппроксимируют различными зависимостями между напряжением  $\sigma$  и деформацией  $\varepsilon$ , которые и представляют собой модели поведения пластической среды при одноосном деформировании. Графическое представление некоторых из этих моделей приведено на рис. 7.1.

Модель *идеальной упругопластической среды* (рис. 7.1, а) характеризуют величиной напряжения  $\sigma_T$ , называемого пределом текучести при растяжении (или сжатии, если проводят испытание на сжатие). До достижения этого предела материал является линейно упругим, а после его достижения деформируется при постоянном напряжении. При разгрузке (уменьшении нагрузки) материал ведет себя как линейно упругий с модулем упругости  $E$ . При повторном нагружении материал деформируется упруго до достижения предела текучести, а далее — пластически.

*Упругопластическая среда с линейным упрочнением* (рис. 7.1, б) обладает свойством деформироваться упруго до достижения предела текучести. При увеличении нагрузки и превышении этого предела зависимость между напряжением и деформацией также будет линейной, но с другим значением  $\partial\sigma/\partial\varepsilon$ . При разгрузке материал ведет себя как линейно упругий с образованием остаточной деформации. При повторном нагружении материал деформируется упруго до достижения напряжения, с которого началась разгрузка. Это напряжение можно рассматривать как новый предел текучести, превышающий первоначальный, поэтому считается, что материал получил пластическое упрочнение. При дальнейшем увеличении нагрузки зависимость напряжения от деформации будет оставаться линейной, поэтому *упрочнение называют линейным*.

Модель *упругопластической среды с нелинейным упрочнением* (рис. 7.1, в) отличается от предыдущей тем, что при превышении

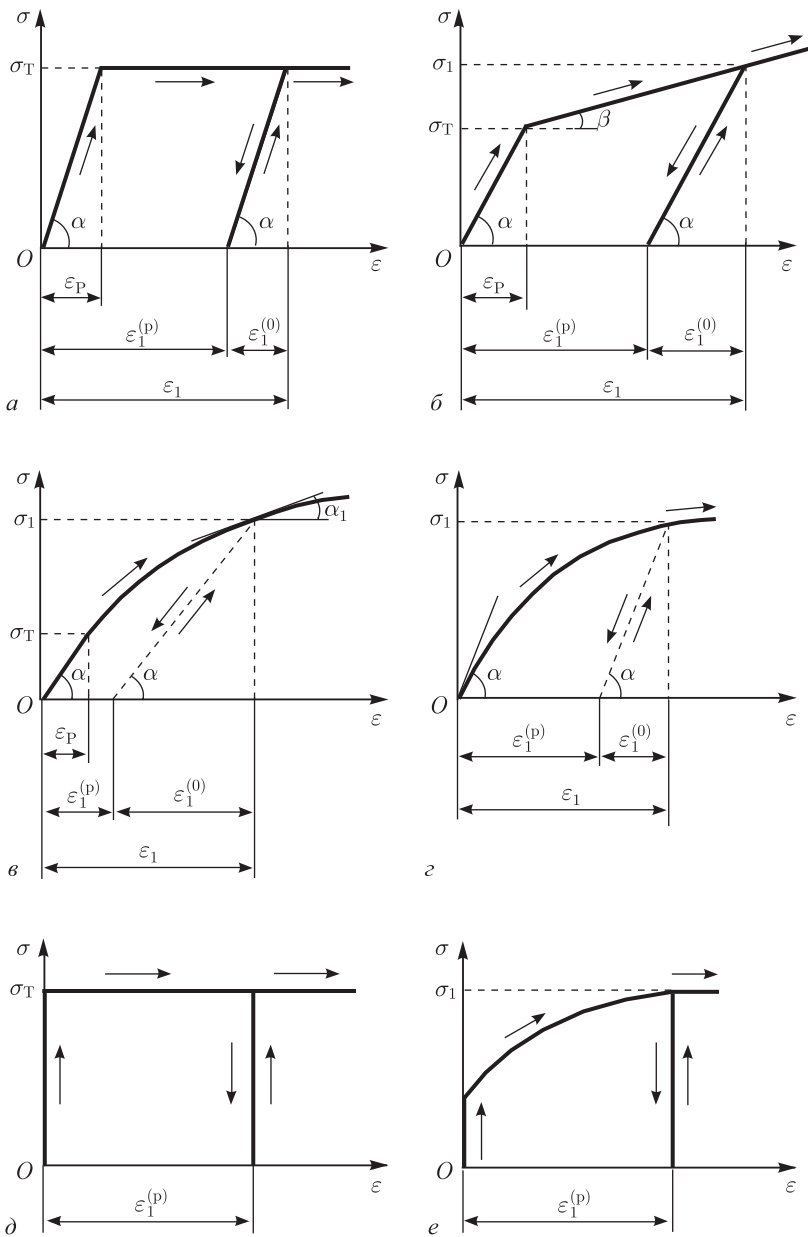


Рис. 7.1.

предела текучести зависимость напряжения от деформации нелинейна, т. е. материал обладает *нелинейным упрочнением*.

Упрочнение имеет обычно направленный характер. Поэтому в результате пластической деформации материал приобретает *деформационную анизотропию*. Одним из проявлений деформационной анизотропии является *эффект Баушингера*. Он заключается в том, что предварительная пластическая деформация одного знака ухудшает сопротивляемость материала в отношении последующей деформации обратного знака. Так, пластическое растяжение стержня приводит к заметному снижению предела текучести при последующем сжатии того же стержня.

Для модели *нелинейной упругопластической среды* (рис. 7.1, *з*) характерно отсутствие предела текучести — пластическая деформация возникает при любом отличном от нуля напряжении. При нагружении зависимость между напряжением и деформацией нелинейна, упрочнение материала нелинейное. Разгрузка для такой среды происходит по закону линейной упругости с модулем упругости  $E$ . При повторном нагружении пластическое деформирование происходит только после достижения напряжения, с которого началась разгрузка. В принципе, нелинейная упругопластическая среда при разгрузке может вести себя и как нелинейная пластическая.

Если при исследовании поведения твердого тела, обладающего свойством деформироваться пластически, можно пренебречь упругими деформациями, то в таком случае целесообразно использовать модель или *идеальной жесткопластической среды* (рис. 6.1, *д*), или *жесткопластической среды с нелинейным* (или *линейным* при  $d\sigma/d\varepsilon = \text{const}$ ) *упрочнением* (рис. 7.1, *е*).

Простейшие эксперименты, рассмотренные выше, позволяют подойти к решению основных вопросов теории пластичности или термопластичности, если упругопластическое деформирование обусловлено в том числе и изменением температуры, а именно, к формулировке соотношений между компонентами тензоров напряжений и деформации и температурой, установлению количественных критериев начала возникновения пластической деформации (или пластического течения).

Широко используемый в теории пластичности термин *пластическое течение* означает непрерывное изменение значений компонентов тензора деформации, а скорость пластического течения представляет собой скорость изменения этих компонентов в отличие от течения жидкости, при котором происходит перемещение частиц сплошной среды в пространстве.

Условия, при которых в окрестности данной точки тела происходит переход из упругого состояния в пластическое, называют *условиями текучести* или *условиями пластичности*.

Так как в упругой области деформированное состояние однозначно определено тензором напряжений и абсолютной температурой и не зависит от пути нагружения, то условие текучести можно выразить в виде

$$f(\sigma_{ij}, T) = 0.$$

Для изотропного материала условие текучести будет симметричной функцией главных напряжений или инвариантов тензора напряжений и абсолютной температуры:

$$f(I_{1\sigma}, I_{2\sigma}, I_{3\sigma}, T) = 0.$$

До определенного уровня всестороннего сжатия или растяжения пластические деформации не возникают. В этом случае условие текучести можно представить в виде функции только двух инвариантов девiatorа напряжений и абсолютной температуры:

$$f(I_{2s}, I_{3s}, T) = 0. \quad (7.1)$$

Условие (7.1) текучести материала в окрестности данной точки при фиксированной температуре можно представить *поверхностью текучести*, построенной в трехмерном пространстве главных напряжений и образующей цилиндр, ось которого перпендикулярна к октаэдрической площадке. След пересечения поверхности текучести с октаэдрической площадкой образует *кривую текучести* (рис. 7.2), которая обладает следующими свойствами:

– луч, проведенный из начала системы координат  $O'$ , пересекает кривую текучести только один раз;

– луч, проведенный из начала системы координат  $O'$ , пересекает кривую текучести только один раз;

– кривая симметрична относительно проекций главных осей тензора напряжений на октаэдрическую площадку  $1', 2', 3'$ ;

– если механические свойства материала при растяжении и сжатии одинаковы и эффектом Баушингера можно пренебречь, то кривая симметрична также относительно прямых, ортогональных к осям  $1', 2'$  и  $3'$ ;

– кривая выпукла (на основе рассмотренного ниже постулата Драккера о неотрицательности приращения работы пластической деформации);

– если материал обладает свойством упругости до некоторого уровня напряженного состояния, то кривая не проходит через начало системы координат (если у материала пластическая деформация возникает с самого начала нагружения, то кривая текучести стягивается в точку, совпадающую с началом системы координат).

Для большой группы материалов (металлов, некоторых видов пластмасс и др.) можно принять, что условие текучести не зависит от  $I_{3s}$  и имеет вид

$$f(I_{2s}, T) = I_{2s} - \tau_T^2(T) = 0, \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} = \tau_T^2(T), \quad (7.2)$$

где  $\tau_T(T)$  — зависящий от температуры предел текучести при чистом сдвиге. Условие текучести (7.2) называют *условием текучести Мизеса* (условием текучести Мизеса–Губера–Генки). Оно было предложено Мизесом из-за его простой формы, однако имеет и физический смысл. Это условие означает, что пластическая деформация в окрестности данной точки

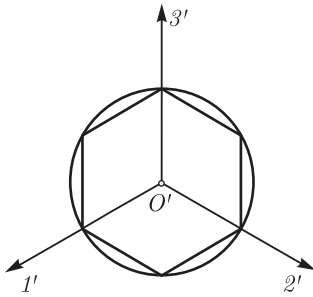


Рис. 7.2.

возникает лишь тогда, когда касательное напряжение  $\tau$  на октаэдрической площадке достигает предельного значения,  $\tau^2 = 2/3\tau_T^2(T)$ , так как  $\tau = \sqrt{2/3I_{2s}}$ .

Известна и энергетическая интерпретация условия (7.2). Энергию упругой деформации единицы объема  $A^{(e)} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{(e)}/2$  можно представить в виде суммы энергии изменения объема  $A_V^{(e)}$  и энергии изменения формы  $A_f^{(e)}$ :

$$A^{(e)} = A_V^{(e)} + A_f^{(e)},$$

где  $A_V^{(e)} = 1/6I_{1\sigma}I_{1\varepsilon}$ ,  $A_f^{(e)} = 1/2s_{ij}e_{ij}$ . В соответствии с условием Мизеса пластическая деформация начинается в бесконечно близкой окрестности данной точки тогда, когда энергия изменения формы достигнет наперед заданного предельного значения  $A^{(e)} = \tau_T^{(2)}/(2\mu)$ . Энергетическая интерпретация условия (7.2) хорошо согласуется с представлениями о микромеханизме пластической деформации, который связан со скольжением по определенным плоскостям в кристаллических телах, приводящим к изменению формы в окрестности рассматриваемой точки.

Из кусочно-линейных условий текучести наиболее широко используют *условие текучести Треска–Сен–Венана*, в соответствии с которым пластическая деформация начинается в окрестности той точки, в которой максимальное касательное напряжение достигнет предельного значения  $\tau_T$ , т. е.

$$\tau_{\max} = \tau_T. \quad (7.3)$$

Это условие имеет физическую интерпретацию, связанную с представлениями о микромеханизме скольжения по определенным плоскостям. Так как главные нормальные напряжения удовлетворяют неравенствам  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , то условие (7.3) принимает вид  $(\sigma_1 - \sigma_3)/2 = \tau_T$ . В общем случае условие текучести Треска–Сен–Венана в пространстве главных напряжений задают следующей системой плоскостей:

$$\begin{aligned} (\sigma_1 - \sigma_2)/2 = \tau_T, \quad (\sigma_1 - \sigma_2)/2 = -\tau_T, \quad (\sigma_2 - \sigma_3)/2 = \tau_T, \\ (\sigma_2 - \sigma_3)/2 = -\tau_T, \quad (\sigma_3 - \sigma_1)/2 = \tau_T, \quad (\sigma_3 - \sigma_1)/2 = -\tau_T. \end{aligned}$$

Геометрически условие Треска–Сен–Венана изображают правильной шестигранной призмой, ось которой проходит через начало координат и имеет одинаковый наклон к осям главных напряжений. Линия ее пересечения с октаэдрической площадкой представляет собой правильный шестиугольник. Если принять, что предел текучести при одноосном растяжении один и тот же как по условию (7.2), так и по условию (7.3), и равен  $\sigma_T$ , то призма (соответственно, шестиугольник) вписана в цилиндр Мизеса (соответственно, окружность) (см. рис. 7.2).

К настоящему времени для изотропных материалов предложено достаточно большое число условий текучести, которые представляют собой некоторые обобщения условий (7.1)–(7.3) или их комбинации.

При продолжении процесса нагружения за пределом текучести у конструкционных материалов, как правило, увеличивается сопротивляемость пластическому деформированию. Для материалов с выраженным пределом текучести упрочнение характеризуется изменением как размеров, так и положения начальной поверхности текучести в пространстве напряжений. Последующие поверхности текучести, которые образуются в процессе нагружения и отделяют области упругого и пластического деформирования друг от друга, называют *поверхностями нагружения*. Условия, определяющие характер изменения начальной поверхности текучести в зависимости от данного напряженного состояния и предыстории деформирования, называют *условиями упрочнения* (иногда — функциями нагружения).

Если в процессе деформирования поверхность нагружения однородно расширяется и сохраняет свою форму, то такое упрочнение называют *изотропным*. В простейшем виде условие изотропного упрочнения представляют зависимостью

$$f(\sigma_{ij}) - \psi_T(\chi, T) = 0, \quad (7.4)$$

где  $\chi$  — скалярный внутренний параметр состояния, называемый *параметром упрочнения*. В процессе пластического деформирования он монотонно возрастает.

Параметр упрочнения может быть определен различными способами. В одном из них за меру упрочнения принимают величину достигнутой интенсивности деформации сдвига  $\Gamma = 2\sqrt{|I_{2e}|}$ ;  $\chi = \Gamma$ . В другом случае за меру упрочнения принимают величину диссипации энергии при пластическом деформировании:  $\chi = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{(p)}$ , где  $\varepsilon_{ij}^{(p)}$  — компоненты тензора пластической деформации. В третьем подходе за меру упрочнения принимают величину, определяющую накопленную пластическую деформацию:  $\chi = \int \sqrt{2d\varepsilon_{ij}^{(p)} d\varepsilon_{ij}^{(p)}}$ , называемую *параметром Одквиста* (Удквиста).

Если начальным считать состояние, при котором пластические деформации отсутствуют, и за начальное условие принять условие текучести Мизеса, то равенство (7.4) можно записать в виде

$$\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} - \tau_T^2(\chi, T) = 0,$$

где  $\tau_T(\chi, T)$  определяет изменение предела текучести при чистом сдвиге, обусловленное упрочнением.

Поскольку условия изотропного упрочнения не способны учитывать эффект Баушингера, наличие которого подтверждено экспериментально, то они пригодны только для приближенного описания пластического деформирования изотропных материалов.

Для описания анизотропного упрочнения посредством перемещения начальной поверхности текучести в пространстве напряжений можно воспользоваться следующим соображением: предел текучести в одном направлении уменьшается настолько, насколько увеличивается предел те-

кучести в противоположном направлении (идеальный эффект Баушингера). Поскольку в этом случае поверхность текучести при заданной температуре не изменится по форме и величине и перемещается в процессе пластического деформирования параллельно самой себе, то уравнение поверхности нагружения имеет вид

$$f(\sigma_{ij} - \chi_{ij}) - \psi_T(T) = 0, \quad (7.5)$$

где  $\chi_{ij}$  — компоненты тензора трансляции (внутреннего параметра состояния), определяющего положение центра поверхности нагружения. Упрочнение такого вида называют *кинематическим*.

Если пренебречь изменением объема при пластическом деформировании, то уравнение (7.5) принимает вид

$$f(s_{ij} - \chi'_{ij}) - \psi_T(T) = 0,$$

где  $\chi'_{ij} = \chi_{ij} - \chi_{kk}\delta_{ij}/3$  — компоненты девиатора трансляции центра поверхности нагружения.

Зависимость между компонентами девиатора трансляции и тензора пластической деформации  $\varepsilon_{ij}^{(p)}$  может быть принята линейной:

$$\chi'_{ij} = c\varepsilon_{ij}^{(p)},$$

где  $c = c(T)$  — характеристика свойств данного материала.

Отметим, что при кинематическом упрочнении первоначально изотропный материал становится анизотропным в результате упрочнения, пластические деформации не зависят от среднего напряжения и направления главных осей тензора напряжений не меняются.

Поскольку условия кинематического упрочнения описывают идеальный эффект Баушингера, то они применимы для сравнительно небольшого числа упрочняющихся материалов. В общем случае поверхность нагружения нельзя считать геометрически подобной поверхности текучести, а изменение поверхности нагружения нельзя представить простым переносом ее центра. Поэтому более общими условиями упрочнения должны быть такие, которые способны описать изменение как размеров, так и положения поверхности нагружения в пространстве напряжений в процессе деформирования. Эти условия упрочнения называют *комбинированными*.

**7.2. Определяющие уравнения для термоупругопластической среды.** Определяющие уравнения для термоупругопластической среды при малых деформациях можно получить, например, при помощи введения следующих внутренних параметров состояния: усредненного симметричного тензора плотности дислокаций и связанного с ним тензора микронапряжений  $\hat{\chi}$  с компонентами  $\chi_{ij}$ , параметра изотропного упрочнения  $\chi$ , усредненно учитывающего плотность микродефектов в поликристаллическом материале. Эти параметры зависят от величины пластической деформации  $\varepsilon_{ij}^{(p)}$  и, кроме того,  $\dot{\chi}_{ij} = 0$  и  $\dot{\chi} = 0$  при  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)} = 0$ . Здесь  $(\dot{\phantom{x}}) = \partial(\phantom{x})/\partial t$ ,  $t$  — монотонный неубывающий параметр, в частности, время.

Любая теория пластичности должна в частном случае описывать одномерные эксперименты, в которых проявляются упругие и пластические свойства сплошной среды, и подтверждаться результатами двумерных или трехмерных экспериментов. На основании имеющихся экспериментальных данных можно сделать следующие заключения об общих свойствах упругопластических тел:

– скорость изменения полной деформации  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  в бесконечно близкой окрестности любой точки рассматриваемого тела состоит из скоростей изменения упругой  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(e)}$ , пластической  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)}$  и температурной  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(T)}$  деформаций, т. е.

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{(e)} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{(T)}; \quad (7.6)$$

– в исходном состоянии материал изотропен, изменение его объема происходит линейно-упруго:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{kk}^{(p)} &= 0, & \dot{\varepsilon}_{kk} &= \dot{\varepsilon}_{kk}^{(e)} + \dot{\varepsilon}_{kk}^{(T)}, \\ \dot{\sigma}_{kk} &= 3 \frac{\partial K}{\partial T} \dot{T} (\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^{(T)}) + 3K (\dot{\varepsilon}_{kk} - \dot{\varepsilon}_{kk}^{(T)}), \end{aligned} \quad (7.7)$$

где  $K = \lambda + 2\mu/3$  — модуль всестороннего сжатия;

– упругая часть девиатора деформации связана с напряжениями законом Гука:

$$\dot{e}_{ij}^{(e)} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mu}{\partial T} \frac{\dot{T}}{\mu^2} s_{ij}, \quad (7.8)$$

где  $e_{ij}^{(e)}$ ,  $s_{ij}$  — девиаторы упругой деформации и напряжений;

– существует условие упрочнения (текучести), определяющее напряженное состояние, при котором бесконечно близкая окрестность рассматриваемой точки тела деформируется пластически:

$$f(\sigma_{ij}, T, \chi_{ij}, \chi) = 0. \quad (7.9)$$

Если условие упрочнения (7.9) не зависит от  $\chi_{ij}$  и  $\chi$ , то оно определяет идеальную пластическую среду, для которой при постоянной температуре возрастание пластической деформации не приводит к возрастанию напряжений. При фиксированных значениях  $T$ ,  $\chi_{ij}$  и  $\chi$  в шестимерном пространстве напряжений условие (7.9) представляет собой гиперповерхность. Поскольку бесконечно малая окрестность рассматриваемой точки тела имеет напряженное состояние, задаваемое тензором напряжений с компонентами  $\sigma_{ij}$ , то этому напряженному состоянию соответствует определенная точка пространства напряжений с радиусом-вектором  $\sigma$ . Поверхность, задаваемая уравнением  $f = 0$ , делит пространство напряжений на две части: в одной  $f(\sigma_{ij}, T, \chi_{ij}, \chi) < 0$ , в другой  $f(\sigma_{ij}, T, \chi_{ij}, \chi) > 0$ . Бесконечно близкая окрестность точек тела, напряженное состояние которых отображается на зону  $f < 0$  пространства напряжений, деформируется упруго. Поэтому область  $f < 0$  называют областью упругости, в ней отсутствуют пластические деформации:  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)} = 0$ .



Для идеальной пластической среды полагают, что бесконечно близкая окрестность точки деформируется пластически в интервале времени  $(t, t + dt)$  и  $d\varepsilon_{ij}^{(p)} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)} dt \neq 0$ , если соответствующее напряжение получит приращение  $d\sigma_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} dt$  и

$$f(\sigma_{ij}, T) = 0, \quad \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} = 0. \quad (7.10)$$

Такой процесс изменения напряженного состояния в окрестности рассматриваемой точки называют *нагрузением*. Если изменение напряженного состояния таково, что

$$f(\sigma_{ij}, T) = 0, \quad \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} < 0, \quad (7.11)$$

то процесс называют *разгрузкой*, пластическая деформация не возникает, т. е.  $d\varepsilon_{ij}^{(p)} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)} dt = 0$ .

Если в момент времени  $t$  напряженному состоянию соответствует точка на поверхности упрочнения, т. е. это напряженное состояние удовлетворяет условию  $f(\sigma_{ij}, T, \chi_{ij}, \chi) = 0$  при заданных значениях  $\chi_{ij}$  и  $\chi$ , то для упрочняющихся пластических тел возможны следующие процессы:

– *активное нагружение*, когда

$$\begin{aligned} f = 0, \quad \dot{f} &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial f}{\partial \chi_{ij}} \dot{\chi}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \chi} \dot{\chi} = 0, \\ \dot{f}^* &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} > 0, \end{aligned} \quad (7.12)$$

при этом  $d\varepsilon_{ij}^{(p)} \neq 0$ ;

– *нейтральное нагружение*, когда

$$f = 0, \quad \dot{f}^* = 0,$$

в этом случае  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)} = 0$ ;

– *разгрузка*, когда

$$f = 0, \quad \dot{f}^* < 0,$$

при этом  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)} = 0$ .

Отметим, что область упругости определена условием  $f(\sigma_{ij}, T, \chi_{ij}, \chi) < 0$ , в ней всегда  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)} = 0$ .

Положим, что скорость изменения пластической деформации задана соотношениями

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)} = Y_{ijkl} \dot{\chi}_{kl} + N_{ij} \dot{\chi}, \quad (7.13)$$

в которых уравнения эволюции параметров  $\chi_{kl}$  и  $\chi$  можно представить в параметрическом виде при помощи параметра  $\lambda$  так, что всегда  $\dot{\lambda} \geq 0$ ,

причем  $\dot{\lambda} = 0$  при  $\varepsilon_{ij}^{(p)} = 0$ , т. е.

$$\begin{aligned}\dot{\chi}_{ij} &= W_{ij}(\sigma_{kl}, T, \chi_{kl}, \chi)\dot{\lambda}, & W_{ij} &= W_{ji}, \\ \dot{\chi} &= W(\sigma_{kl}, T, \chi_{kl}, \chi)\dot{\lambda}.\end{aligned}\quad (7.14)$$

Подставляя соотношения (7.14) в (7.13), получим выражения для скорости изменения компонентов тензора пластической деформации:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)} = \dot{\lambda} M_{ij}, \quad (7.15)$$

где  $M_{ij} = Y_{ijkl} W_{kl} + N_{ij} W$ ,  $M_{ij} = M_{ji}$ ,  $M_{kk} = 0$ .

Соотношения (7.15) называют *законом пластического течения*.

Определим скорость изменения параметра  $\lambda$  из условия  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)} \neq 0$  при активном нагружении, когда  $\dot{f} = 0$  и  $\dot{f}^* > 0$ , т. е. из условия (7.12). Подставив второе равенство из (7.12) в (7.15), получим

$$\dot{\lambda} = \left| \frac{-\dot{f}^*}{\frac{\partial f}{\partial \chi_{ij}} W_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \chi} W} \right|,$$

и закон пластического течения примет вид

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)} = \left| \frac{-\dot{f}^*}{\frac{\partial f}{\partial \chi_{ij}} W_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \chi} W} \right| M_{ij}. \quad (7.16)$$

При построении некоторых вариантов теории пластического течения используют *постулат Друккера* (Друккера), суть которого заключается в следующем. Пусть к деформируемому телу, бесконечно близкая окрестность точки которого имеет в момент времени  $t^*$  напряженное состояние, заданное компонентами тензора напряжений  $\sigma_{ij}^*$ , статически прикладывается дополнительная система сил, а затем также медленно снимается. При этом дополнительном воздействии напряженное и деформированное состояния в окрестности точки изменяются, и при деформации тела дополнительные напряжения совершают работу. Постулат Друккера утверждает, что работа, совершаемая дополнительным воздействием, неотрицательна.

Рассмотрим замкнутый цикл изменения дополнительной нагрузки, при котором в момент времени  $t^*$  напряженное состояние соответствует области упругости. Приложим дополнительную нагрузку в интервале времени  $(t^*, t_1)$  и доведем напряженное состояние до значений  $\sigma_{ij}^{(1)}$  в момент времени  $t_1$ , которое изображается точкой на поверхности текучести. В интервале времени  $(t_1, t_2)$  происходит пластическое деформирование до достижения напряженного состояния с  $\sigma_{ij}^{(2)}$  в момент  $t_2$ , а затем следует возвращение к начальному напряженному состоянию в момент  $t^*$  при помощи разгрузки на интервале  $(t_2, t^*)$ . При этом цикле дополнительные напряжения совершают

работу, которую можно выразить в виде разности между полной работой деформации, совершаемой в течение цикла, и работой деформации, совершаемой начальными напряжениями, т. е.

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)} \geq 0. \quad (7.17)$$

Если за начальное напряженное состояние с  $\sigma_{ij}^*$  принять  $\sigma_{ij}^{(1)}$  и приложить дополнительную нагрузку только в интервале  $(t_1, t_2)$  при  $dt = t_2 - t_1$ , то из неравенства (7.17) для идеальной пластической среды следует равенство

$$\dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)} = 0,$$

а для сплошной среды с упрочнением — неравенство

$$\dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)} > 0.$$

Предположим, что условие текучести идеальной пластической среды представляет собой уравнение гладкой поверхности в пространстве напряжений с однозначно определенной внешней нормалью в любой точке. Тогда из постулата Драккера следует, что вектор  $d\mathbf{\varepsilon}^{(p)}$  ортогонален вектору  $d\sigma$ , лежащему в плоскости, касательной к поверхности  $f(\sigma_{ij}, T) = 0$ . Следовательно, вектор  $d\mathbf{\varepsilon}^{(p)}$  коллинеарен вектору  $\text{grad} f$  и

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}},$$

где  $\dot{\lambda} > 0$ , так как вектор  $d\mathbf{\varepsilon}^{(p)}$  направлен по внешней нормали к поверхности текучести.

Допуская применимость неравенства (7.17) к термоупругопластическим средам с упрочнением, можно утверждать, что тензор  $\bar{M}$  с компонентами  $M_{ij}$  в соотношении (7.15) пропорционален  $\partial f / \partial \sigma_{ij}$ . Поскольку функция  $f(\sigma_{ij}, T, \chi_{ij}, \chi) = 0$  определена с точностью до произвольного множителя, можно записать равенство

$$M_{ij} = \partial f / \partial \sigma_{ij}.$$

Для выполнения этого условия необходимо существование дифференциальной зависимости между термодинамическим потенциалом Гиббса  $F$ :

$$\rho F(\sigma_{ij}, T, \chi_{ij}, \chi) = \rho A(\varepsilon_{ij}, T, \chi_{ij}, \chi) - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij},$$

и условием упрочнения  $f(\sigma_{ij}, T, \chi_{ij}, \chi) = 0$ , следующей из соотношений (7.13)–(7.15):

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial}{\partial \chi_{kl}} \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right) W_{kl} + \frac{\partial}{\partial \chi} \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right) W.$$

Последнее соотношение станет очевидным, если учесть, что  $\varepsilon_{ij} = -\rho \partial F / \partial \sigma_{ij}$ , положить  $Y_{ijkl} = \partial \varepsilon_{ij} / \partial \chi_{kl}$  и  $N_{ij} = \partial \varepsilon_{ij} / \partial \chi$ , а также воспользоваться выражением для  $M_{ij}$  из (7.15).

Закон пластического течения (7.16) в таком случае принимает вид

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)} = \left| - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T}}{\frac{\partial f}{\partial \chi_{kl}} W_{kl} + \frac{\partial f}{\partial \chi} W} \right| \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (7.18)$$

Если влияние внутренних структурных параметров  $\chi_{ij}$  и  $\chi$  на процесс пластического деформирования можно разделить, т.е. записать условие упрочнения, например, как

$$f(\sigma_{ij}, T, \chi_{ij}, \chi) = f_T(\sigma_{ij}, \chi_{ij}, T) - \psi_T(\chi, T) = 0,$$

то закон пластического течения принимает вид

$$\dot{\sigma}_{ij}^{(p)} = \left| - \frac{\frac{\partial f_T}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} + \left( \frac{\partial f_T}{\partial T} - \frac{\partial \psi_T}{\partial T} \right) \dot{T}}{\frac{\partial f_T}{\partial \chi_{kl}} W_{kl} - \frac{\partial \psi_T}{\partial \chi} W} \right| \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (7.19)$$

Законы пластического течения типа (7.18) или (7.19) называют *ассоциированными* с условиями упрочнения (текучести).

Процесс распространения теплоты в теле при использовании рассмотренной модели сплошной среды можно описать при помощи уравнения (3.53), закона Фурье (4.7) и соотношения, связывающего объемную плотность свободной энергии  $\rho A(\varepsilon_{ij}, T, \chi_{ij}, \chi)$  с объемной плотностью термодинамического потенциала Гиббса  $\rho F(\sigma_{ij}, T, \chi_{ij}, \chi)$ :

$$-\rho T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \dot{T} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - T \frac{\partial p_{ij}}{\partial T} \dot{\chi}_{ij} - T \frac{\partial p}{\partial T} \dot{\chi} + \delta + \rho r,$$

где  $p_{ij} = -\rho \partial F / \partial \chi_{ij}$ ,  $p = -\rho \partial F / \partial \chi$ , а диссипативная функция  $\delta = p_{ij} \dot{\chi}_{ij} + p \dot{\chi}$ . Естественно, что полученное уравнение теплопроводности должно рассматриваться с соответствующими краевыми условиями.

**7.3. Деформационная теория термопластичности.** Среди разнообразных задач механики деформируемого твердого тела, связанных с определением напряженно-деформированного состояния элементов конструкций из упругопластических материалов, встречаются такие задачи, общим условием в которых является изменение в процессе нагружения всех компонентов девiatorа напряжений в окрестности каждой точки среды в одном и том же отношении. В этом случае нагружение называют *пропорциональным* и при анализе упругопластических напряжений и деформации можно уже исследовать не процессы, а конечные состояния, когда между собой связаны компоненты тензоров напряжений и деформации и температура, т.е. воспользоваться соотношениями *деформационной теории термопластичности*. Для однородной изотропной среды уравнения этой теории, в принципе, можно получить как частный случай теории пластического течения для изотропно упрочняющихся материалов с условием текучести Мизеса.

Для случая активного нагружения при постоянной температуре одноосные диаграммы деформирования (см. рис. 7.1) дают однозначную зависимость между напряжением и деформацией. По аналогии с законом Гука можно записать

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_c},$$

где  $E_c$  — *секущий модуль*. В отличие от модуля упругости  $E$ , зависящего для данного материала только от температуры,  $E_c = E_c(\varepsilon, T)$ .

Пластическая деформация

$$\varepsilon^{(p)} = \varepsilon - \frac{\sigma}{E} = \left( \frac{1}{E_c} - \frac{1}{E} \right) \sigma. \quad (7.20)$$

Для сложного напряженного состояния соотношения деформационной теории термопластичности, основанные на большом числе экспериментальных данных, формулируют следующим образом:

– тензор полной деформации представляет собой сумму упругой, пластической и температурной составляющих, т. е.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(e)} + \varepsilon_{ij}^{(p)} + \varepsilon_{ij}^{(T)}, \quad (7.21)$$

причем обратимы только упругая и температурная части деформации;

– изменение объема происходит только вследствие изменения упругой и температурной деформаций:

$$\sigma_{kk} = 3K(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^{(T)}),$$

следовательно,  $\varepsilon_{kk}^{(p)} = 0$ , а компоненты тензора пластической деформации совпадают с компонентами деватора пластической деформации:  $\varepsilon_{ij}^{(p)} = e_{ij}^{(p)}$ ;

– компоненты деватора деформации пропорциональны компонентам деватора напряжений:

$$e_{ij} = \frac{\psi}{2\mu} s_{ij}, \quad (7.22)$$

где  $\psi$  — *параметр пластичности*.

Если воспользоваться выражениями для интенсивностей деваторов деформации  $\varepsilon_n = \sqrt{2e_{ij}e_{ij}/3}$  и напряжений  $\sigma_n = \sqrt{3s_{ij}s_{ij}/2}$  и провести свертку по индексам в соотношении (7.22), то получим

$$e_{ij} = \frac{3\varepsilon_n}{2\sigma_n} s_{ij},$$

где  $3\varepsilon_n/(2\sigma_n) = \psi/(2\mu)$ .

Поскольку компоненты деватора температурной деформации

$$e_{ij}^{(T)} = \varepsilon_{ij}^{(T)} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}^{(T)}\delta_{ij} = 0,$$

то

$$\varepsilon_{ij}^{(p)} = e_{ij} - e_{ij}^{(e)} = \frac{\psi - 1}{2\mu} s_{ij}, \quad \varepsilon_n^{(p)} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_{ij}^{(p)} \varepsilon_{ij}^{(p)}}{3}} = \frac{\psi - 1}{3\mu} \sigma_n,$$

так что

$$\varepsilon_n = \varepsilon_n^{(p)} + \frac{\sigma_n}{3\mu} = \varepsilon_n^{(p)} + \frac{2(1 + \nu)}{3E} \sigma_n,$$

где  $\varepsilon_n = (\psi/3\mu)\sigma_n$ .

Для одноосного растяжения  $\sigma_n = \sigma$ ,  $\varepsilon_n^{(p)} = \varepsilon^{(p)}$  и, следовательно,

$$\varepsilon_n = \varepsilon^{(p)} + \frac{2(1 + \nu)}{3} \frac{\sigma}{E},$$

или, с учетом равенства (7.20),

$$\varepsilon_n = \varepsilon - \frac{1 - 2\nu}{3} \frac{\sigma}{E};$$

– при данной температуре интенсивность напряжений  $\sigma_n$  есть функция интенсивности деформации  $\varepsilon_n$  и эта функция одинакова для любого вида напряженного состояния.

Зависимость  $\sigma_n = \sigma_n(\varepsilon_n)$  называют *обобщенной диаграммой деформирования*. Для различных значений температуры можно построить обобщенные диаграммы деформирования  $\sigma_n = \sigma_n(\varepsilon_n, T)$  по диаграммам изотермического растяжения  $\sigma = \sigma(\varepsilon, T)$ .

Из соотношения (7.22) следует, что секущий модуль обобщенной диаграммы деформирования

$$E_{\text{сн}} = \frac{\sigma_n}{\varepsilon_n} = \frac{3\mu}{\psi} = \frac{3}{2} \frac{E}{1 + \nu} \psi,$$

поэтому

$$\varepsilon_n^{(p)} = \left( \frac{1}{E_{\text{сн}}} - \frac{1}{3\mu} \right) \sigma_n = \left( \frac{1}{E_{\text{сн}}} - \frac{2(1 + \nu)}{3E} \right) \sigma_n,$$

а так как

$$\varepsilon_n^{(p)} = \varepsilon^{(p)} = \left( \frac{1}{E_c} - \frac{1}{E} \right) \sigma_n = \left( \frac{1}{E_c} - \frac{1}{E} \right) \sigma,$$

то параметр пластичности

$$\psi = 1 + \frac{3}{2(1 + \nu)} \left( \frac{E}{E_c} - 1 \right). \quad (7.23)$$

При сложном напряженном состоянии компоненты деватора деформации с помощью соотношения (7.23) можно выразить через секущий модуль одноосной диаграммы растяжения, т. е.

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \frac{3}{2E_c} \left( 1 - \frac{1 - 2\nu}{3} \frac{E_c}{E} \right) s_{ij}, \\ \varepsilon_{ij}^{(p)} &= \frac{3}{2E_c} \left( 1 - \frac{E_c}{E} \right) s_{ij} = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{E_c} - \frac{1}{E} \right) s_{ij}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Окончательная зависимость между компонентами тензоров деформации и напряжений для рассмотренной модели термопластической среды принимает следующий вид:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\psi}{2\mu} \left( \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) + \left( \frac{1}{9} \frac{\sigma_{kk}}{K} \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}^{(T)} \right).$$

В общем случае при использовании деформационной теории пластичности не очевидно, что пропорциональное нагружение будет выполняться всегда, так как пропорциональное изменение внешних сил не обязательно приводит к пропорциональному нагружению. Для осуществления пропорционального нагружения необходимо выполнение следующих достаточных условий (*теорема А.А.Ильюшина*):

- зависимость между интенсивностями девиаторов деформации и напряжений — степенная;
- материал несжимаем.

Как правило, при решении конкретных задач деформационной теории термопластичности эти условия не выполняются, однако накопленный к настоящему времени опыт исследования различных конструкций, особенно однородного нагружения, позволяет сделать заключение о достаточной точности получаемых результатов.

Необходимо также отметить, что не все из приведенных на рис. 7.1 диаграмм деформирования можно использовать для решения задач деформационной теории термопластичности, поскольку зависимость  $\sigma = \sigma(\varepsilon, T)$  от  $\varepsilon$  должна быть взаимно однозначной, а модуль упругости  $E$  — конечной величиной. Следовательно, использование диаграмм деформирования, представленных на рис. 7.1, *a, d, e*, в деформационной теории термопластичности невозможно.

Анизотропные материалы, к которым в первую очередь относятся композитные материалы, нашли широкое применение в различных термонапряженных конструкциях. Особенности технологии изготовления материалов обуславливают высокую степень анизотропии их механических свойств, причем в большинстве случаев можно говорить об ортотропии. Нелинейная зависимость между напряжениями и деформациями у этих материалов наиболее ярко проявляется при повышенных температурах.

Для сложного напряженного состояния соотношения деформационной теории термопластичности анизотропных (ортотропных) материалов можно сформулировать в виде следующих положений, аналогичных тем, что были приняты для изотропных материалов:

- тензор полной деформации представляет собой сумму упругой, пластической и температурной составляющих, т. е. выполняется соотношение (7.21); как и ранее, обратимы только упругая и температурная деформации;
- в любой момент процесса деформирования выполняется соотношение

$$\sigma = 3\varphi K \varepsilon, \quad (7.25)$$

где  $\sigma = \sigma_{ij}\alpha_{ij}$  — аналог объемного напряжения;  $e = \beta_{ij}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(T)})$  — аналог объемной деформации;  $K = C_{ijkl}\alpha_{kl}\alpha_{ij}/3$  — аналог модуля всестороннего сжатия;  $\alpha_{ij}$  — симметричный тензор, нормированный соотношением  $\alpha_{ij}\alpha_{ij} = 1$ ;  $\beta_{ij} = C_{ijkl}\alpha_{kl}/(3K)$ . Предполагается, что компоненты тензора  $\alpha_{ij}$  могут изменяться в процессе деформирования материала, переменный коэффициент  $\varphi$  учитывает “псевдообъемную” сжимаемость материала — следствие имеющихся технологических дефектов: пор и пустот, неидеальности контакта волокон и связующего и др.;

– предполагается, что между аналогами девиаторов напряжений и деформации существует зависимость

$$s_{ij} = \frac{\tau}{3K\gamma} C_{ijkl} e_{kl}, \quad (7.26)$$

где  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij}^{(T)}$ ,  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*$ ;  $\varepsilon_{ij}^* = \alpha_{ij}e$  и  $\sigma_{ij}^* = \beta_{ij}\sigma$  — аналоги компонентов шаровых тензоров деформации и напряжений соответственно;  $\tau = \sqrt{3KB_{ijkl}s_{kl}s_{ij}}$  и  $\gamma = \sqrt{C_{ijkl}e_{kl}e_{ij}/(3K)}$  — обобщенные интенсивности девиаторов напряжений и деформации;  $B_{ijkl} = C_{ijkl}^{-1}$  — компоненты тензора коэффициентов упругой податливости; связь между компонентами аналогов шаровых тензоров напряжений и деформации определена соотношением

$$\sigma_{ij}^* = \varphi C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^*; \quad (7.27)$$

– при данной температуре зависимость обобщенной интенсивности девиатора напряжений от обобщенной интенсивности девиатора деформации инвариантна к виду напряженно-деформированного состояния:  $\tau = \tau(\gamma, T)$ .

В том случае, когда параметр “псевдообъемной” сжимаемости  $\varphi \neq 1$ , соотношение (7.26) должно быть дополнено выражением

$$\sigma_{ij}^* = \frac{\sigma}{3Ke} C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^*,$$

полученным из (7.25) и (7.27).

Окончательно выражение, связывающее компоненты тензоров деформации и напряжений, можно записать в виде

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{\psi} B_{ijkl} s_{kl} + \frac{\sigma}{3K} \frac{\alpha_{ij}}{\varphi} + \varepsilon_{ij}^{(T)}, \quad (7.28)$$

где  $\psi = \tau/(3K\gamma)$  — параметр пластичности.

Легко проверить, что для изотропного материала соотношения (7.25)–(7.28) переходят в соотношения (7.22)–(7.24). Действительно, в этом случае  $\varphi = 1$ ;  $\alpha_{ij} = \delta_{ij}/\sqrt{3}$ ;  $\sigma = \sigma_{ij}\alpha_{ij} = \sigma_{kk}/\sqrt{3}$ ;  $K = C_{ijkl}\alpha_{kl}\alpha_{ij}/3 = [\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})]\alpha_{kl}\alpha_{ij}/3 = (3\lambda + 2\mu)/3$ ;  $\beta_{ij} = \delta_{ij}/\sqrt{3}$



и, наконец,

$$s_{ij} = \frac{\tau}{3K\gamma} C_{ijkl} e_{kl} = \sqrt{\frac{s_{mn}s_{mn}}{e_{pq}e_{pq}}} e_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_n}{\varepsilon_n} e_{ij}, \quad m, n, p, q = 1, 2, 3.$$

Основной трудностью, с которой приходится сталкиваться при использовании соотношений (7.21), (7.25)–(7.28), является построение обобщенной диаграммы деформирования  $\tau = \tau(\gamma, T)$ . Для ее построения необходимо записать приведенные выше соотношения для каждого направления ортотропии и иметь соответствующие одноосные диаграммы деформирования. В результате решения получаемой при этом системы нелинейных алгебраических уравнений будем иметь обобщенную диаграмму деформирования для каждого заданного значения температуры.

**7.4. Термопластическая сплошная среда с памятью.** Существует широкий класс материалов, которые при деформации проявляют одновременно упругие, пластические и вязкие свойства, не имея при этом четко выраженного предела упругого деформирования. Вязкопластические свойства у таких материалов могут проявляться при малых напряжениях и сравнительно невысоких по сравнению с  $T_0$  уровнях температуры. Для описания их поведения к настоящему времени предложены различные математические модели с едиными определяющими уравнениями для процессов как нагружения, так и разгрузки. Подобный подход позволяет не рассматривать образование в деформируемом теле зон упругой и неупругой деформации. Модель сплошной среды с памятью и внутренними параметрами состояния относится именно к этой группе моделей. Основная идея, применяемая в данном случае, состоит во введении в рассмотрение приведенного времени, базируясь на различных исходных предположениях.

Рассмотрим тело, занимающее объем  $V$  и ограниченное поверхностью  $S$ , на которое действуют тепловые и механические нагрузки, изменяющиеся в соответствии с заданной программой на отрезке времени  $[t_0, t_1]$ . Положим, что материал рассматриваемого тела имеет вязкопластические свойства, а деформации малы. Вследствие внешних воздействий в окрестности любой точки внутри тела возникает необратимый термодинамический процесс, который сопровождается диссипацией энергии, вызванной вязкопластической деформацией, связанными с ней структурными изменениями и теплопроводностью. На макроуровне эти структурные изменения можно, как и ранее, описать с помощью набора внутренних параметров состояния, отражающих усредненные плотности микродефектов в материале.

Для вязкопластических тел, как правило, вводят в рассмотрение скалярный  $\chi$  и тензорный с компонентами  $\chi_{ij}$  параметры состояния. В течение всего процесса деформирования в вязкопластическом теле рассматриваемого типа возникают остаточная деформация и структурные изменения, поэтому все необратимые изменения удобно описывать при помощи усредненного скалярного параметра  $\xi$  того же типа, что и  $\chi$ , но имеющего более

широкий смысл. Параметр  $\xi$  должен отражать не только эффект пластического упрочнения, но и общее вязкопластическое деформирование. Для материалов с выраженной анизотропией деформации необходимо, кроме  $\xi$ , вводить также тензорные переменные типа  $\chi_{ij}$ . Параметр  $\xi$  можно рассматривать и как приведенное время, поскольку он описывает последовательность изменения внутреннего локального состояния термодинамической системы. Он должен представлять собой однозначную неотрицательную и неубывающую функцию времени  $t$ , т. е.  $\xi(t) \geq 0$  и  $d\xi/dt \geq 0$  при  $t \in [t_0, t_1]$ .

В отличие от реального времени  $t$  приведенное время  $\xi$  является временем, определяемым свойствами конкретного материала. С его помощью можно получить зависимость актуального состояния термодинамической системы от истории и скорости его достижения, а также оценить степень внутренних структурных изменений, произошедших до момента времени  $t$ . При таком подходе состояние рассматриваемой термодинамической системы в окрестности точки с координатами  $x_i$  будет также функцией приведенного времени  $\xi$  и определяющие термодинамические функции примут вид, аналогичный (3.48):

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}, \xi) &= A(\varepsilon_{kl}, T, \chi, \chi_{kl}), & \sigma_{ij}(\mathbf{x}, \xi) &= \rho \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}, \\ h(\mathbf{x}, \xi) &= -\frac{\partial A}{\partial T}, & q_i(\mathbf{x}, \xi) &= q_i(\varepsilon_{kl}, T, \vartheta_k, \chi, \chi_{kl}), \end{aligned} \quad (7.29)$$

а кинетические уравнения для определения  $\chi$  и  $\chi_{ij}$  — аналогичный (3.49):

$$\begin{aligned} \frac{d\chi(\mathbf{x}, \xi)}{d\xi} &= \kappa(\varepsilon_{kl}, T, \vartheta_k, \chi, \chi_{kl}), \\ \frac{d\chi_{ij}(\mathbf{x}, \xi)}{d\xi} &= \kappa_{ij}(\varepsilon_{kl}, T, \vartheta_k, \chi, \chi_{kl}). \end{aligned} \quad (7.30)$$

Если ввести параметр  $\zeta(\mathbf{x}, t)$  с помощью неравенства типа (3.52) таким образом, что

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = -\frac{1}{T} q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial A}{\partial \chi} \frac{d\chi}{d\xi} - \rho \frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}} \frac{d\chi_{ij}}{d\xi} \geq 0, \quad (7.31)$$

то очевидно, что этот параметр представляет собой неубывающую функцию времени  $t$  или приведенного времени  $\xi$ . Это дает нам возможность использовать  $\zeta$  как масштаб приведенного времени, изменяющийся в течение процесса в зависимости от степени диссипации энергии. Функция  $\zeta$  может терять гладкость в точках, соответствующих обратимой стадии течения процесса, для которой  $d\chi/d\xi = 0$  и  $d\chi_{ij}/d\xi = 0$ . Если в процессе деформирования температура тела постоянна, то можно записать

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = \frac{1}{g(\zeta)} \sqrt{-\rho \frac{\partial A}{\partial \chi} \frac{d\chi}{d\xi} - \rho \frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}} \frac{d\chi_{ij}}{d\xi}}, \quad (7.32)$$

где  $g(\zeta)$  — неотрицательная функция масштаба приведенного времени  $\zeta$ , т. е.  $g(\zeta) \geq 0$  при  $\zeta > 0$ . Частные случаи соотношений можно получить, если

положить  $g(\zeta) \equiv 1$  или отождествить  $\chi_{ij}$  с компонентами тензора неупругой деформации.

К задаче построения определяющих уравнений для вязкопластических тел с введением приведенного времени можно подойти иначе.

В процессе деформирования параметры  $\chi$  и  $\chi_{ij}$  далеко не всегда можно определить экспериментально, но зато можно измерить компоненты тензора деформации  $\varepsilon_{ij}$  и абсолютную температуру  $T$  в любой момент времени  $t \in [t_0, t_1]$  в окрестности некоторых точек рассматриваемого тела. В связи с этим введем скалярную величину  $\tilde{\xi}$ , характеризующую последовательные состояния  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t)$  и  $T(\mathbf{x}, t)$  и играющую роль приведенного времени. Любому приращению  $dt$  соответствуют приращения  $d\varepsilon_{ij}$  и  $dT$ . Этим трем приращениям соответствует приращение приведенного времени  $d\tilde{\xi}$ . Чтобы приращение тензорной величины  $d\varepsilon_{ij}$  можно было оценить с помощью скалярной величины, положим, что скалярное приращение деформации оценивается с помощью элементарной работы  $(da_e)^2 = d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}/2$ . Эта работа соответствует упругой деформации, так как при  $dt \rightarrow 0$  и  $dT \rightarrow 0$  мгновенная реакция рассматриваемого материала на внешнее воздействие является упругой и для нее можно записать следующие соотношения:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}d\varepsilon_{ij}, \quad C_{ijkl} = \rho \frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}, \quad (da_e)^2 = \frac{1}{2} C_{ijkl} d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{kl}.$$

В общем случае компоненты тензора коэффициентов упругости  $C_{ijkl} = C_{ijkl}(\varepsilon_{mn}, T, \chi, \chi_{mn})$ . Тогда приведенное время  $\tilde{\xi}$  можно задать при помощи уравнения

$$d\tilde{\xi} = \sqrt{D_a(da_e)^2 + D_T(dT)^2 + D_t(dt)^2},$$

в котором  $D_a, D_T$  и  $D_t$  — неотрицательные постоянные, определяемые экспериментально. Параметр  $\tilde{\xi}$  является однозначной неотрицательной и неубывающей функцией  $t$ , т. е.  $\tilde{\xi}(t) \geq 0$  и  $d\tilde{\xi}/dt \geq 0$  для любого  $t \in [t_0, t_1]$  и фиксированного  $\mathbf{x}$ . Для описания в процессе деформирования еще и эффектов диссипации вводят масштаб приведенного времени  $\tilde{\zeta}$  — неотрицательную, неубывающую и однозначную функцию от  $\tilde{\xi}$ , а следовательно, и времени  $t$ , т. е.  $\tilde{\zeta}(\tilde{\xi}) \geq 0$  и  $d\tilde{\zeta}/d\tilde{\xi} \geq 0$ . Определяющие и кинетические уравнения при таком способе введения внутреннего времени имеют тот же вид, что и уравнения (7.29), (7.30).

Оба рассмотренных способа введения приведенного времени позволяют получить одинаковые результаты, если за масштаб приведенного времени  $\tilde{\xi}$  принять параметр  $\tilde{\zeta}$ , совпадающий с  $\zeta$  из первого способа.

При построении соотношений термопластической среды с памятью будем, как и ранее, полагать, что состояние рассматриваемой сплошной среды в окрестности любой материальной точки определяется четырьмя термодинамическими функциями — активными переменными из (7.29), а компоненты тензора неупругой деформации  $\chi_{ij}$  подчиняются второму

уравнению из (7.30). Тогда, аналогично выражению (6.53),

$$\begin{aligned}
 \rho A \left[ \widehat{\mathbf{\Lambda}}(\xi), \widehat{\mathbf{\Lambda}}^\xi(s) \right] = & \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\xi} \int_{-\infty}^{\xi} R_{ijkl}(\xi - \xi', \xi - \xi'') \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\xi')}{\partial \xi'} \frac{\partial \varepsilon_{kl}(\xi'')}{\partial \xi''} d\xi' d\xi'' + \\
 & + \int_{-\infty}^{\xi} \int_{-\infty}^{\xi} B_{ijkl}(\xi - \xi', \xi - \xi'') \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\xi')}{\partial \xi'} \frac{\partial \chi_{kl}(\xi'')}{\partial \xi''} d\xi' d\xi'' + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\xi} \int_{-\infty}^{\xi} D_{ijkl}(\xi - \xi', \xi - \xi'') \frac{\partial \chi_{ij}(\xi')}{\partial \xi'} \frac{\partial \chi_{kl}(\xi'')}{\partial \xi''} d\xi' d\xi'' - \\
 & - \int_{-\infty}^{\xi} \int_{-\infty}^{\xi} \beta_{ij}(\xi - \xi', \xi - \xi'') \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\xi')}{\partial \xi'} \frac{\partial \theta(\xi'')}{\partial \xi''} d\xi' d\xi'' - \\
 & - \int_{-\infty}^{\xi} \int_{-\infty}^{\xi} \gamma_{ij}(\xi - \xi', \xi - \xi'') \frac{\partial \chi_{ij}(\xi')}{\partial \xi'} \frac{\partial \theta(\xi'')}{\partial \xi''} d\xi' d\xi'' + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\xi} \int_{-\infty}^{\xi} m(\xi - \xi', \xi - \xi'') \frac{\partial \theta(\xi')}{\partial \xi'} \frac{\partial \theta(\xi'')}{\partial \xi''} d\xi' d\xi'', \quad (7.33)
 \end{aligned}$$

где  $\widehat{\mathbf{\Lambda}}(\xi) = (\varepsilon_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \chi_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, T, \vartheta_k \mathbf{e}_k)$  и  $\theta(\xi) = T(\xi) - T_0$ . В соответствии с равенствами (3.61) из соотношения (7.29) получим

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} = & \int_{-\infty}^{\xi} R_{ijkl}(\xi - \xi', 0) \frac{\partial \varepsilon_{kl}(\xi')}{\partial \xi'} d\xi' + \int_{-\infty}^{\xi} B_{ijkl}(\xi - \xi', 0) \frac{\partial \chi_{kl}(\xi')}{\partial \xi'} d\xi' - \\
 & - \int_{-\infty}^{\xi} \beta_{ij}(\xi - \xi', 0) \frac{\partial \theta(\xi')}{\partial \xi'} d\xi', \quad (7.34)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rho h = & \int_{-\infty}^{\xi} \beta_{ij}(\xi - \xi', 0) \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\xi')}{\partial \xi'} d\xi' + \int_{-\infty}^{\xi} \gamma_{ij}(\xi - \xi', 0) \frac{\partial \chi_{ij}(\xi')}{\partial \xi'} d\xi' - \\
 & - \int_{-\infty}^{\xi} m(\xi - \xi', 0) \frac{\partial \theta(\xi')}{\partial \xi'} d\xi'. \quad (7.35)
 \end{aligned}$$

Компоненты тензора скоростей изменения неупругой деформации заданы в виде

$$\frac{d\chi_{ij}}{d\xi} = \dot{\chi}_{ij} = \int_{-\infty}^{\xi} G_{ijkl}(\xi - \xi') \frac{\partial \varepsilon_{kl}(\xi')}{\partial \xi'} d\xi' + \int_{-\infty}^{\xi} E_{ij}(\xi - \xi') \frac{\partial \theta(\xi')}{\partial \xi'} d\xi'. \quad (7.36)$$

Выражение для диссипативной функции в рассматриваемой модели сплошной среды запишем, как следует из (3.46), в виде

$$\delta = \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \xi} - \rho \left( \frac{\partial A}{\partial \xi} + h \frac{\partial T}{\partial \xi} \right),$$

а затем, учитывая соотношения (7.34) и (7.35), получим

$$\begin{aligned} \delta = & -\dot{\chi}_{ij} \left( \int_{-\infty}^{\xi} B_{ijkl}(\xi - \xi', 0) \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\xi')}{\partial \xi'} d\xi' + \right. \\ & + \int_{-\infty}^{\xi} D_{ijkl}(\xi - \xi', 0) \frac{\partial \chi_{ij}(\xi')}{\partial \xi'} d\xi' - \int_{-\infty}^{\xi} \gamma_{ij}(\xi - \xi', 0) \frac{\partial \theta(\xi')}{\partial \xi'} d\xi' \left. \right) - \\ & - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\xi} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} R_{ijkl}(\xi - \xi', \xi - \xi'') \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\xi')}{\partial \xi'} \frac{\partial \varepsilon_{kl}(\xi'')}{\partial \xi''} d\xi' d\xi'' - \\ & - \int_{-\infty}^{\xi} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} B_{ijkl}(\xi - \xi', \xi - \xi'') \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\xi')}{\partial \xi'} \frac{\partial \chi_{kl}(\xi'')}{\partial \xi''} d\xi' d\xi'' - \\ & - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\xi} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} D_{ijkl}(\xi - \xi', \xi - \xi'') \frac{\partial \chi_{ij}(\xi')}{\partial \xi'} \frac{\partial \chi_{kl}(\xi'')}{\partial \xi''} d\xi' d\xi'' + \\ & + \int_{-\infty}^{\xi} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \beta_{ij}(\xi - \xi', \xi - \xi'') \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\xi')}{\partial \xi'} \frac{\partial \theta(\xi'')}{\partial \xi''} d\xi' d\xi'' + \\ & + \int_{-\infty}^{\xi} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \gamma_{ij}(\xi - \xi', \xi - \xi'') \frac{\partial \chi_{ij}(\xi')}{\partial \xi'} \frac{\partial \theta(\xi'')}{\partial \xi''} d\xi' d\xi'' - \\ & - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\xi} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} m(\xi - \xi', \xi - \xi'') \frac{\partial \theta(\xi')}{\partial \xi'} \frac{\partial \theta(\xi'')}{\partial \xi''} d\xi' d\xi''. \quad (7.37) \end{aligned}$$

Если выражение (7.36) подставить в соотношение (7.34), то окончательно связь между компонентами тензоров напряжений и деформации и температурой примет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & \int_{-\infty}^{\xi} R_{ijkl}(\xi - \xi', 0) \frac{\partial \varepsilon_{kl}(\xi')}{\partial \xi'} d\xi' + \\ & + \int_{-\infty}^{\xi} B_{ijmn}(\xi - \xi', 0) \left( \int_{-\infty}^{\xi'} G_{mnkl}(\xi' - \xi'') \frac{\partial \varepsilon_{kl}(\xi'')}{\partial \xi''} d\xi'' + \right. \\ & \left. + \int_{-\infty}^{\xi'} E_{mn}(\xi' - \xi'') \frac{\partial \theta(\xi'')}{\partial \xi''} d\xi'' \right) d\xi' - \int_{-\infty}^{\xi} \beta_{ij}(\xi - \xi', 0) \frac{\partial \theta(\xi')}{\partial \xi'} d\xi'. \quad (7.38) \end{aligned}$$

Уравнение теплопроводности для рассматриваемой модели сплошной среды запишем аналогично (6.66):

$$\begin{aligned} -T \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{-\infty}^{\xi} m(\xi - \xi', 0) \frac{\partial \theta(\xi')}{\partial \xi'} d\xi' + T \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{-\infty}^{\xi} \beta_{ij}(\xi - \xi', 0) \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\xi')}{\partial \xi'} d\xi' + \\ + T \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{-\infty}^{\xi} \gamma_{ij}(\xi - \xi', 0) \frac{\partial \chi_{ij}(\xi')}{\partial \xi'} d\xi' = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) + \rho r + \delta, \end{aligned}$$

где диссипативная функция  $\delta$  задана соотношением (7.37).

Отметим, что в рассмотренной модели термопластической сплошной среды явно присутствует время. Это дает возможность описывать эффекты вязкого деформирования и называть такую среду *термовязкопластической*. Если положить, что в рассмотренной модели сплошной среды явная зависимость от времени отсутствует, то приведенное время будет связано только с компонентами тензора деформации и температурой.

Накопленные к настоящему времени экспериментальные данные по одноосному знакопеременному деформированию некоторых конструкционных материалов подтверждают возможность использования рассмотренной модели сплошной среды для описания их поведения при сложном термосиловом нагружении.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабкин А.В., Селиванов В.В.* Прикладная механика сплошных сред: В 3 т. Т.1. Основы механики сплошных сред. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. — 368 с.
2. *Бартенев Г.М., Френкель С.Я.* Физика полимеров. — Л.: Химия, 1990. — 432 с.
3. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. — 310 с.
4. *Карнаухов В.Г.* Связанные задачи термовязкоупругости. — Киев: Наукова думка, 1982. — 260 с.
5. *Кнетс И.В.* Основные современные направления в математической теории пластичности. — Рига: Зинатне, 1971. — 147 с.
6. *Коларов Д., Балтов А., Бончева Н.* Механика пластических сред: Пер. с болг. — М.: Мир, 1979. — 302 с.
7. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости: Пер. с англ. — М.: Мир, 1974. — 338 с.
8. *Кувыркин Г.Н.* Термомеханика деформируемого твердого тела при высокоинтенсивном нагружении. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. — 142 с.
9. *Лурье А.И.* Теория упругости. — М.: Наука, 1970. — 939 с.
10. *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред: Пер. с англ. — М.: Мир, 1974. — 318 с.
11. *Можен М.* Механика электромагнитных сплошных сред: Пер. с англ. — М.: Мир, 1991. — 560 с.
12. *Новик А., Берри Б.* Релаксационные явления в кристаллах: Пер. с англ. — М.: Мир, 1975. — 472 с.
13. *Петров Н., Бранков Й.* Современные проблемы термодинамики: Пер. с болг. — М.: Мир, 1986. — 288 с.
14. *Победра Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. — 262 с.
15. *Подстригач Я.С., Коляно Ю.М.* Обобщенная термомеханика. — Киев: Наукова думка, 1976. — 310 с.
16. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. — М.: Наука, 1994. — Т. 1. — 528 с.
17. *Селиванов В.В., Зарубин В.С., Ионов В.Н.* Аналитические методы механики сплошной среды. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1994. — 384 с.
18. *Трудделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред: Пер. с англ. — М.: Мир, 1975. — 592 с.
19. *Цянь Сюэ-сень.* Физическая механика: Пер. с китайского. — М.: Мир, 1965. — 544 с.

Научное издание

*ЗАРУБИН Владимир Степанович*

*КУВЫРКИН Георгий Николаевич*

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕРМОМЕХАНИКИ**

Редактор *О.А. Пенина*

Оригинал-макет: *Е.Ю. Морозов*

Оформление переплета: *А.А. Логунов*

ЛР № 071930 от 06.07.99

Подписано в печать 07.10.02. Формат 60×90/16

Бумага офсетная. Печать офсетная

Усл. печ. л. 10,5. Уч.-изд. л. 11. Тираж 400 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»

МАИК «Наука/Интерпериодика»

117997 Москва, Профсоюзная, 90

E-mail: [fizmat@maik.ru](mailto:fizmat@maik.ru)

Отпечатано с готовых диапозитивов

в ППП «Типография «Наука»

121099 Москва, Шубинский пер., 6